Лекция 7.
Линии на плоскости и их уравнения. Прямая на плоскости. Различные формы уравнений прямой на плоскости. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.

Пусть на плоскости задана декартова система координат и некоторая линия L.

Определение 7.1. Уравнение

$$\Phi(x,y) = 0 \qquad (7.1)$$

называется уравнением линии L, если этому уравнению удовлетворяют координаты x и y любой точки, лежащей на линии L, и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на линии L.

Пример.
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ - уравнение окружности радиуса R с центром в точке (a,b).

Замечание. Часто удобно использовать **параметрические** уравнения линии:

$$x = j(t), y = y(t), \qquad (7.2)$$

где функции $j(t)$ и $y(t)$ непрерывны по параметру t.

Прямая на плоскости.

Рассмотрим различные виды уравнений прямой на плоскости.
Пусть прямая проходит через точку $M_0(x_0,y_0)$ перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n} = \{A,B\}$. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M}$, где $M(x,y)$ – произвольная точка прямой, ортогонален $\boldsymbol{n}$. Поэтому координаты любой точки данной прямой удовлетворяют уравнению

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \text{ -} \qquad (7.3)$$

уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
Замечание. Вектор **n** называется **нормалью** к прямой.

Преобразуем уравнение (7.3) к виду:

$$Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0.$$

Обозначив $-Ax_0 - By_0 = C$, получим **общее уравнение прямой:**

$$Ax + By + C = 0. \qquad (7.4)$$

Получим теперь уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ параллельно вектору $\boldsymbol{q} = \{l,m\}$. Так как вектор $\overrightarrow{M_0M}$, где $M(x,y)$ – произвольная точка прямой, коллинеарен $\boldsymbol{q}$, координаты любой точки данной прямой удовлетворяют уравнению

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \qquad (7.5)$$

называемому **каноническим уравнением прямой**. Вектор **q** при этом называется **направляющим вектором прямой**. В частности, если прямая проходит через точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$, ее направляющим вектором можно считать $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$, и из уравнения (7.5) следует:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \text{ -} \qquad (7.6)$$

уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.
Пример.
Составим уравнение прямой, проходящей через точки $M(1,2)$ и $N(5,-3)$. Уравнение (7.6) примет вид:

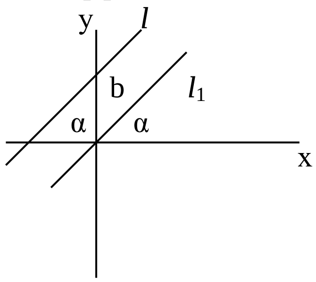
$\frac{x-1}{5-1}=\frac{y-2}{-3-2}, -5x+5=4y-8, \quad 5x+4y-13=0$ - общее уравнение данной прямой.

Обозначив за t значения равных дробей, стоящих в левой и правой частях уравнения (7.5), можно преобразовать это уравнение к виду:

$$x = x_0 + lt, \; y = y_0 + mt \; - \qquad (7.7)$$

параметрические уравнения прямой.

Для прямой l, не параллельной оси Оу, можно ввести так называемый **угловой коэффициент *k*** – тангенс угла, образованного прямой и осью Ох, и записать уравнение прямой в виде:



$$y = kx + b \; - \qquad (7.8)$$

уравнение прямой с угловым коэффициентом. Действительно, все точки прямой l_1, параллельной l и проходящей через начало координат, удовлетворяют уравнению $y = kx$, а ординаты соответствующих точек на прямой l отличаются от них на постоянную величину b.

Неполные уравнения прямой.

Уравнение (7.4) называется **полным**, если коэффициенты A,B и C не равны нулю, и **неполным**, если хотя бы одно из этих чисел равно нулю. Рассмотрим возможные виды неполных уравнений прямой.

1) $C = 0$ - прямая $Ax + By = 0$ проходит через начало координат.
2) $B = 0$ - прямая $Ax + C = 0$ параллельна оси Oy (так как нормаль к прямой $\{A,0\}$ перпендикулярна оси Oy).
3) $A = 0$ - прямая $By + C = 0$ параллельна оси Ох.
4) $B=C=0$ – уравнение $Ax = 0$ определяет ось Оу.
5) $A=C=0$ – уравнение $By = 0$ определяет ось Ох.

Таким образом, прямая, задаваемая полным уравнением, не проходит через начало координат и не параллельна координатным осям. Преобразуем полное уравнение прямой следующим образом:

$$Ax + By + C = 0 \;|:(-C), \quad -\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y=1, \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \qquad (7.9)$$

где $a=-\frac{C}{A}$ и $b=-\frac{C}{B}$ равны величинам отрезков, отсекаемых прямой на осях Ox и Oy. Поэтому уравнение (7.9) называют **уравнением прямой в отрезках**.

Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

1. Если прямые L_1 и L_2 заданы общими уравнениями
$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$,
то угол между ними равен углу между их нормалями, то есть между векторами $\{A_1,B_1\}$ и $\{A_2,B_2\}$. Следовательно,

$$\cos j = \frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \qquad (7.10)$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых тоже сводятся к условиям параллельности и перпендикулярности нормалей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$ - **условие параллельности**, (7.11)

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$ - **условие перпендикулярности**. (7.12).

2. Если прямые заданы каноническими уравнениями (7.5), по аналогии с пунктом 1 получим:

$$\cos\varphi = \frac{l_1l_2 + m_1m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}, \qquad (7.13)$$

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}$$ - **условие параллельности**, (7.14)

$$l_1l_2 + m_1m_2 = 0$$ - **условие перпендикулярности**. (7.16).

Здесь $\{l_1, m_1\}$ и $\{l_2, m_2\}$ - направляющие векторы прямых.

3. Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами (7.8)

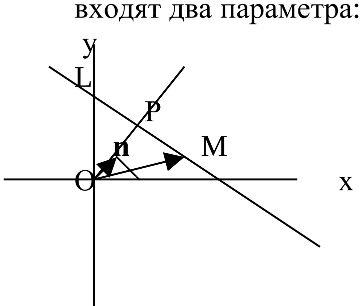
$y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, где $k_1 = tg\alpha_1, k_2 = tg\alpha_2$, а α_1 и α_2 – углы наклона прямых к оси Ox, то для угла φ между прямыми справедливо равенство: $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Тогда

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 tg\alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \qquad (7.17)$$

Условие параллельности имеет вид: $k_1=k_2$, (7.18)
условие перпендикулярности – $k_2=-1/k_1$, (7.19)
поскольку при этом tgφ не существует.

Расстояние от точки до прямой.

Рассмотрим прямую L и проведем перпендикуляр OP к ней из начала координат (предполагаем, что прямая не проходит через начало координат). Пусть $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор, направление которого совпадает с OP. Составим уравнение прямой L, в которое входят два параметра: p – длина отрезка OP и α – угол между OP и Ox.



Для точки M, лежащей на L, проекция вектора $\boldsymbol{OM}$ на прямую OP равна p. С другой стороны, пр$_n\boldsymbol{OM}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{OM}$. Поскольку $\boldsymbol{n}=\{\cos\alpha, \sin\alpha\}$, а $\boldsymbol{OM}=\{x,y\}$, получаем, что

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p, \text{ или}$$

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 - \qquad (7.20)$$

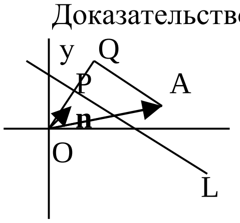
- искомое уравнение прямой L, называемое **нормальным уравнением прямой** (термин «нормальное уравнение» связан с тем, что отрезок OP является перпендикуляром, или нормалью, к данной прямой).

Определение 7.2. Если d – расстояние от точки A до прямой L, то **отклонение** δ точки A от прямой L есть число $+d$, если точка A и начало координат лежат по разные стороны от прямой L, и число $-d$, если они лежат по одну сторону от L.

Теорема 7.1. Отклонение точки $A(x_0,y_0)$ от прямой L, заданной уравнением (7.20), определяется по формуле:

$$d = x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p. \qquad (7.21)$$

Доказательство.



Проекция OQ вектора $\boldsymbol{OA}$ на направление OP равна $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{OA}=x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha$. Отсюда $\delta = PQ=OQ-OP=OQ-p= x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p$, что и требовалось доказать.

Следствие.
Расстояние от точки до прямой определяется так:

$$d = | x_0 \cos a + y_0 \sin a - p | . \qquad (7.22).$$

Замечание. Для того, чтобы привести общее уравнение прямой к нормальному виду, нужно умножить его на число $\pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, причем знак выбирается противоположным знаку свободного члена *C* в общем уравнении прямой. Это число называется нормирующим множителем.

Пример. Найдем расстояние от точки *A*(7,-3) до прямой, заданной уравнением $3x + 4y + 15 = 0$. $A^2 + B^2 = 9+16=25$, $C=15>0$, поэтому нормирующий множитель равен -1/5, и нормальное уравнение прямой имеет вид: $-\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0.$ Подставив в его левую часть вместо x и y координаты точки *A*, получим, что ее отклонение от прямой равно $-\frac{3}{5}\cdot 7 - \frac{4}{5}\cdot(-3) - 3 = -4{,}8.$ Следовательно, расстояние от точки *A* до данной прямой равно 4,8.

Лекция 8.
Прямая и плоскость в пространстве. Уравнения плоскости и прямой в пространстве. Угол между плоскостями. Угол между прямой и плоскостью.

Отметим, что многие утверждения и формулы, касающиеся плоскости в пространстве, доказываются и выводятся так же, как при изучении прямой на плоскости, поэтому в этих случаях будут даваться ссылки на предыдущую лекцию.

Плоскость в пространстве.

Получим сначала уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n} = \{A,B,C\}$,называемому нормалью к плоскости. Для любой точки плоскости $M(x, y, z)$ вектор $\boldsymbol{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ ортогонален вектору $\boldsymbol{n}$, следовательно, их скалярное произведение равно нулю:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (8.1)$$

Получено уравнение, которому удовлетворяет любая точка заданной плоскости – **уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.**

После приведения подобных можно записать уравнение (8.1) в виде:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (8.2)$$

где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Это линейное уравнение относительно трех переменных называют **общим уравнением плоскости**.

Неполные уравнения плоскости.

Если хотя бы одно из чисел *A, B, C, D* равно нулю, уравнение (8.2) называют неполным. Рассмотрим возможные виды неполных уравнений:

1) $D = 0$ – плоскость $Ax + By + Cz = 0$ проходит через начало координат.
2) $A = 0$ – $\boldsymbol{n} = \{0,B,C\} \perp Ox$, следовательно, плоскость $By + Cz + D = 0$ параллельна оси Ox.
3) $B = 0$ – плоскость $Ax + Cz + D = 0$ параллельна оси Oy.

4) $C = 0$ – плоскость $Ax + By + D = 0$ параллельна оси Oz.
5) $A = B = 0$ – плоскость $Cz + D = 0$ параллельна координатной плоскости Oxy (так как она параллельна осям Ox и Oy).
6) $A = C = 0$ – плоскость $By + D = 0$ параллельна координатной плоскости Oxz.
7) $B = C = 0$ – плоскость $Ax + D = 0$ параллельна координатной плоскости Oyz.
8) $A = D = 0$ – плоскость $By + Cz = 0$ проходит через ось Ox.
9) $B = D = 0$ – плоскость $Ax + Cz = 0$ проходит через ось Oy.
10) $C = D = 0$ - плоскость $Ax + By = 0$ проходит через ось Oz.
11) $A = B = D = 0$ – уравнение $Cz = 0$ задает координатную плоскость Oxy.
12) $A = C = D = 0$ – получаем $By = 0$ – уравнение координатной плоскости Oxz.
13) $B = C = D = 0$ – плоскость $Ax = 0$ является координатной плоскостью Oyz.

Если же общее уравнение плоскости является полным (то есть ни один из коэффициентов не равен нулю), его можно привести к виду:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \qquad (8.3)$$

называемому **уравнением плоскости в отрезках**. Способ преобразования показан в лекции 7. Параметры a, b и c равны величинам отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях.

Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

Если две плоскости (α_1 и α_2) заданы общими уравнениями вида:
$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$,
то очевидно, что угол между ними равен углу между их нормалями, то есть между векторами $\mathbf{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$ и $\mathbf{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$. Из формулы (5.6) получаем, что косинус угла между плоскостями α_1 и α_2 равен

$$\cos j = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \qquad (8.4)$$

Условие параллельности плоскостей заключается в параллельности нормалей:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}, \qquad (8.5)$$

а **условие перпендикулярности плоскостей** – в перпендикулярности нормалей или равенстве нулю их скалярного произведения:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (8.6)$$

Выведем еще несколько уравнений плоскости. Пусть плоскость проходит через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой. Тогда векторы $\mathbf{M_1M_2}=\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, $\mathbf{M_1M_3}=\{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}$ и $\mathbf{M_1M}=\{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$, где $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости, компланарны. Следовательно, их смешанное произведение равно нулю. Используя координатную запись смешанного произведения, получаем:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (8.7)$$

Это уравнение, которому удовлетворяют координаты x, y, z любой точки, лежащей на искомой плоскости, является **уравнением плоскости, проходящей через три данные точки.**

Способом, аналогичным изложенному в лекции 7, можно получить **нормальное уравнение плоскости**:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \qquad (8.8)$$

где p – длина перпендикуляра OP, опущенного из начала координат на плоскость, а $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали к этой плоскости. **При этом расстояние от любой точки А пространства до данной плоскости** определяется по формуле:

$$d = | x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p | \;, \qquad (8.9)$$

где x_0, y_0, z_0 – координаты рассматриваемой точки A. Подмодульное выражение в формуле (8.9) называется **отклонением точки *A* от плоскости** и принимает положительные значения, если A и начало координат лежат по разные стороны от плоскости, и отрицательные, если эти две точки лежат по одну сторону от плоскости. Нормальное уравнение получается из общего уравнения плоскости в результате деления его на нормирующий множитель $\pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, знак которого противоположен знаку D.

Доказательства всех сформулированных утверждений полностью аналогичны исследованию нормального уравнения прямой на плоскости, рассмотренного в лекции 7.

Прямая в пространстве.

Замечание. Прямую в пространстве невозможно задать одним уравнением. Для этого требуется система двух или более уравнений.

Первая возможность составить уравнения прямой в пространстве – представить эту прямую как пересечение двух непараллельных плоскостей, заданных уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, где коэффициенты A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 не пропорциональны:

$$\begin{aligned} &A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ &A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{aligned} \qquad (8.10)$$

Однако при решении многих задач удобнее пользоваться другими уравнениями прямой, содержащими в явной форме некоторые ее геометрические характеристики.

Составим уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ параллельно вектору $\boldsymbol{a}=\{l,m,n\}$.

Определение 8.1. Любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой, называется ее **направляющим вектором**.

Для любой точки $M(x,y,z)$, лежащей на данной прямой, вектор $\boldsymbol{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ коллинеарен направляющему вектору $\boldsymbol{a}$. Поэтому имеют место равенства:

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}, \qquad (8.11)$$

называемые **каноническими уравнениями** прямой в пространстве.

В частности, если требуется получить уравнения прямой, проходящей через две точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, направляющим вектором такой прямой можно считать вектор $\boldsymbol{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, и уравнения (8.11) принимают вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad - \qquad (8.12)$$

- **уравнения прямой, проходящей через две данные точки**.

Если же принять каждую из равных дробей в уравнениях (8.11) за некоторый параметр t, можно получить так называемые **параметрические уравнения прямой**:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} . \qquad (8.13)$$

Для того, чтобы перейти от уравнений (8.10) к каноническим или параметрическим уравнениям прямой, требуется найти направляющий вектор этой прямой и координаты любой точки, принадлежащей ей. Направляющий вектор прямой ортогонален нормалям к обеим плоскостям, следовательно, он коллинеарен их векторному произведению. Поэтому в качестве направляющего вектора можно выбрать [$\boldsymbol{n_1 n_2}$] или любой вектор с пропорциональными координатами. Чтобы найти точку, лежащую на данной прямой, можно задать одну ее координату произвольно, а две остальные найти из уравнений (8.10), выбрав их так, чтобы определитель из их коэффициентов не равнялся нулю.
Пример. Составим канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x+y-3z-5=0 \\ x-5y+4z+3=0 \end{cases}.$$

Найдем [$\boldsymbol{n_1 n_2}$]. $\boldsymbol{n_1}$ = {2,1,-3}, $\boldsymbol{n_2}$ = {1,-5,4}. Тогда [$\boldsymbol{n_1 n_2}$] = {-11,-11,-11}. Следовательно, направляющим вектором прямой можно считать вектор {1,1,1}.

Будем искать точку на прямой с координатой z_0=0. Для координат x_0 и y_0 получим систему уравнений $\begin{cases} 2x_0+y_0-5=0 \\ x_0-5y_0+3=0 \end{cases}$, откуда x_0=2, y_0=1. Теперь можно составить канонические уравнения прямой:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}.$$

Параметрические уравнения той же прямой имеют вид:

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases}.$$

Замечание. Если какая-либо из координат направляющего вектора равна 0, то предполагается, что для любой точки прямой числитель соответствующей дроби в канонических уравнениях тоже равен 0.

Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью.

Угол между прямыми в пространстве равен углу между их направляющими векторами. Поэтому, если две прямые заданы каноническими уравнениями вида $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ и $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$, косинус угла между ними можно найти по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}. \qquad (8.14)$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых тоже сводятся к соответствующим условиям для их направляющих векторов:

$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$ - **условие параллельности прямых**, (8.15)

$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$ - **условие перпендикулярности прямых**. (8.16)

Угол φ между прямой, заданной каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

и плоскостью, определяемой общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

можно рассматривать как дополнительный к углу ψ между направляющим вектором прямой и нормалью к плоскости. Тогда

$$\sin \varphi = \cos \psi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \qquad (8.17)$$

Условием параллельности прямой и плоскости является при этом условие перпендикулярности векторов ***n*** и ***a***:

$$Al + Bm + Cn = 0, \qquad (8.18)$$

а **условием перпендикулярности прямой и плоскости** – условие параллельности этих векторов: $A/l = B/m = C/n.$ (8.19)

Лекция 9.

Линейные преобразования координат. Собственные векторы и собственные числа матрицы, их свойства. Характеристический многочлен матрицы, его свойства.

Будем говорить, что на множестве векторов R задано **преобразование *A***, если каждому вектору $\boldsymbol{x} \in R$ по некоторому правилу поставлен в соответствие вектор $A\boldsymbol{x} \in R$.

Определение 9.1. Преобразование A называется **линейным**, если для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ и для любого действительного числа λ выполняются равенства:

$$A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y}, \quad A(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda A\boldsymbol{x}. \qquad (9.1)$$

Определение 9.2. Линейное преобразование называется **тождественным**, если оно преобразует любой вектор $\boldsymbol{x}$ в самого себя.

Тождественное преобразование обозначается E: $E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

Рассмотрим трехмерное пространство с базисом $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$, в котором задано линейное преобразование A. Применив его к базисным векторам, мы получим векторы $A\boldsymbol{e_1}, A\boldsymbol{e_2}, A\boldsymbol{e_3}$, принадлежащие этому трехмерному пространству. Следовательно, каждый из них можно единственным образом разложить по векторам базиса:

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{e_1} &= a_{11}\boldsymbol{e_1} + a_{21}\boldsymbol{e_2} + a_{31}\boldsymbol{e_3}, \\ A\boldsymbol{e_2} &= a_{12}\boldsymbol{e_1} + a_{22}\boldsymbol{e_2} + a_{32}\boldsymbol{e_3}, \\ A\boldsymbol{e_3} &= a_{13}\boldsymbol{e_1} + a_{23}\boldsymbol{e_2} + a_{33}\boldsymbol{e_3}. \end{aligned} \qquad (9.2)$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ называется **матрицей линейного преобразования *A*** в базисе $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$. Столбцы этой матрицы составлены из коэффициентов в формулах (9.2) преобразования базиса.

Замечание. Очевидно, что матрицей тождественного преобразования является единичная матрица E.

Для произвольного вектора $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e_2} + x_3\boldsymbol{e_3}$ результатом применения к нему линейного преобразования A будет вектор $A\boldsymbol{x}$, который можно разложить по векторам того же базиса: $A\boldsymbol{x} = x`_1\boldsymbol{e_1} + x`_2\boldsymbol{e_2} + x`_3\boldsymbol{e_3}$, где координаты $x`_i$ можно найти по формулам:

$$\begin{aligned} x`_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x`_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x`_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned} \qquad (9.3)$$

Коэффициенты в формулах этого линейного преобразования являются элементами строк матрицы A.

Преобразование матрицы линейного преобразования при переходе к новому базису.

Рассмотрим линейное преобразование А и два базиса в трехмерном пространстве: $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ и $\underline{\boldsymbol{e}}_1, \underline{\boldsymbol{e}}_2, \underline{\boldsymbol{e}}_3$. Пусть матрица С задает формулы перехода от базиса $\{\boldsymbol{e}_k\}$ к базису $\{\underline{\boldsymbol{e}}_k\}$. Если в первом из этих базисов выбранное линейное преобразование задается матрицей А, а во втором – матрицей $\underline{A}$, то можно найти связь между этими матрицами, а именно:

$$A = C^{-1}\underline{A}C \qquad (9.4)$$

Действительно, $\begin{pmatrix} \vec{\underline{e}}_1 \\ \vec{\underline{e}}_2 \\ \vec{\underline{e}}_3 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}$, тогда $\underline{A}\begin{pmatrix} \vec{\underline{e}}_1 \\ \vec{\underline{e}}_2 \\ \vec{\underline{e}}_3 \end{pmatrix} = \underline{A}C\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}$. С другой стороны, результаты применения одного и того же линейного преобразования A в базисе $\{\boldsymbol{e}_k\}$, т.е. $A\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}$, и в базисе $\{\underline{\boldsymbol{e}}_k\}$: соответственно $\underline{A}\begin{pmatrix} \vec{\underline{e}}_1 \\ \vec{\underline{e}}_2 \\ \vec{\underline{e}}_3 \end{pmatrix}$ - связаны матрицей C: $\underline{A}\begin{pmatrix} \vec{\underline{e}}_1 \\ \vec{\underline{e}}_2 \\ \vec{\underline{e}}_3 \end{pmatrix} = C\,A\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}$, откуда следует, что $CA=\underline{A}C$. Умножая обе части этого равенства слева на C^{-1}, получим $C^{-1}CA = C^{-1}\underline{A}C$, что доказывает справедливость формулы (9.4).

Собственные числа и собственные векторы матрицы.

Определение 9.3. Вектор $\boldsymbol{x}$ называется **собственным вектором** матрицы A, если найдется такое число λ, что выполняется равенство: $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, то есть результатом применения к $\boldsymbol{x}$ линейного преобразования, задаваемого матрицей A, является умножение этого вектора на число λ. Само число λ называется **собственным числом** матрицы A.

Подставив в формулы (9.3) $x`_j = \lambda x_j$, получим систему уравнений для определения координат собственного вектора:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \lambda x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \lambda x_3 \end{cases}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 = 0 \end{cases}. \qquad (9.5)$$

Эта линейная однородная система будет иметь нетривиальное решение только в случае, если ее главный определитель равен 0 (правило Крамера). Записав это условие в виде:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

получим уравнение для определения собственных чисел λ, называемое **характеристическим уравнением**. Кратко его можно представить так:

$$|A - \lambda E| = 0, \qquad (9.6)$$

поскольку в его левой части стоит определитель матрицы A-λE. Многочлен относительно λ $|A - \lambda E|$ называется **характеристическим многочленом** матрицы А.

Свойства характеристического многочлена:

1) Характеристический многочлен линейного преобразования не зависит от выбора базиса.
   Доказательство. $\Delta_A = \Delta_C \Delta_{\underline{A}} \Delta_{C^{-1}}$ (см. (9.4)), но $\Delta_C \Delta_{C^{-1}} = \Delta_E = 1$, следовательно, $\Delta_A = \Delta_{\underline{A}}$. Таким образом, Δ_A не зависит от выбора базиса. Значит, и $|A\text{-}\lambda E|$ не изменяется при переходе к новому базису.
2) Если матрица A линейного преобразования является **симметрической** (т.е. a_{ij}=a_{ji}), то все корни характеристического уравнения (9.6) – действительные числа.

Свойства собственных чисел и собственных векторов:

1) Если выбрать базис из собственных векторов $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{x_3}$, соответствующих собственным значениям λ_1, λ_2, λ_3 матрицы A, то в этом базисе линейное преобразование А имеет матрицу диагонального вида:

$$A = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{pmatrix}. \qquad (9.7)$$

Доказательство этого свойства следует из определения собственных векторов.

2) Если собственные значения преобразования A различны, то соответствующие им собственные векторы линейно независимы.
3) Если характеристический многочлен матрицы A имеет три различных корня, то в некотором базисе матрица A имеет диагональный вид.

Пример.

Найдем собственные числа и собственные векторы матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 1-l & 1 & 3 \\ 1 & 5-l & 1 \\ 3 & 1 & 1-l \end{vmatrix} = 0$,

$(1-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda) + 6 - 9(5-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) = 0$, $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0$, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$.

Найдем координаты собственных векторов, соответствующих каждому найденному значению λ. Из (9.5) следует, что если $\boldsymbol{x}_{(1)}=\{x_1,x_2,x_3\}$ – собственный вектор, соответствующий λ_1=-2, то

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

- совместная, но неопределенная система. Ее решение можно записать в виде $\boldsymbol{x}_{(1)}=\{a,0,-a\}$, где а – любое число. В частности, если потребовать, чтобы $|\boldsymbol{x}_{(1)}|=1$, $\boldsymbol{x}_{(1)}=\{\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\}$.

Подставив в систему (9.5) λ_2=3, получим систему для определения координат второго собственного вектора - $\boldsymbol{x}_{(2)}=\{y_1,y_2,y_3\}$:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$, откуда $\boldsymbol{x}_{(2)}=\{b,-b,b\}$ или, при условии $|\boldsymbol{x}_{(2)}|=1$, $\boldsymbol{x}_{(2)}=\{\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\}$.

Для $\lambda_3 = 6$ найдем собственный вектор $\boldsymbol{x}_{(3)}=\{z_1, z_2, z_3\}$:

$$\begin{cases} -5z_1 + z_2 + 3z_3 = 0 \\ z_1 - z_2 + z_3 = 0 \\ 3z_1 + z_2 - 5z_3 = 0 \end{cases}$$, $\boldsymbol{x}_{(3)}=\{c,2c,c\}$ или в нормированном варианте

$\boldsymbol{x}_{(3)} = \{\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\}$. Можно заметить, что $\boldsymbol{x}_{(1)}\boldsymbol{x}_{(2)} = ab - ab = 0$, $\boldsymbol{x}_{(1)}\boldsymbol{x}_{(3)} = ac - ac = 0$, $\boldsymbol{x}_{(2)}\boldsymbol{x}_{(3)} = bc - 2bc + bc = 0$. Таким образом, собственные векторы этой матрицы попарно ортогональны.

Лекция 10.

Квадратичные формы и их связь с симметричными матрицами. Свойства собственных векторов и собственных чисел симметричной матрицы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.

Определение 10.1. **Квадратичной формой** действительных переменных $x_1, x_2,\ldots,x_n$ называется многочлен второй степени относительно этих переменных, не содержащий свободного члена и членов первой степени.

Примеры квадратичных форм:

$f(x_1,x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \qquad (n = 2),$

$f(x_1,x_2,x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \qquad (n = 3).$ (10.1)

Напомним данное в прошлой лекции определение симметрической матрицы:

Определение 10.2. Квадратная матрица называется **симметрической**, если $a_{ij} = a_{ji}$, то есть если равны элементы матрицы, симметричные относительно главной диагонали.

Свойства собственных чисел и собственных векторов симметрической матрицы:

1) Все собственные числа симметрической матрицы действительные.

Доказательство (для $n = 2$).

Пусть матрица A имеет вид: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - l & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - l \end{vmatrix} = 0,\ l^2 - (a_{11} + a_{22})\,l + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0. \qquad (10.2)$$

Найдем дискриминант:

$D = a_{11}^2 + 2a_{11}a_{22} + a_{22}^2 - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}^2 = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0$, следовательно, уравнение имеет только действительные корни.

2) Собственные векторы симметрической матрицы ортогональны.

Доказательство (для $n = 2$).

Координаты собственных векторов $\vec{e_1} = \{x_1, y_1\}$ и $\vec{e_2} = \{x_2, y_2\}$ должны удовлетворять уравнениям:

$(a_{11} - l_1)x_1 + a_{12}y_1 = 0, (a_{11} - l_2)x_2 + a_{12}y_2 = 0$. Следовательно, их можно задать так:

$\overrightarrow{e_1} = \left\{ a, \dfrac{l_1 - a_{11}}{a_{12}} a \right\}, \overrightarrow{e_2} = \left\{ b, \dfrac{l_2 - a_{11}}{a_{12}} b \right\}$. Скалярное произведение этих векторов имеет вид:

$\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} = \dfrac{ab}{a_{12}^2}\left(a_{12}^2 + l_1 l_2 - a_{11}(l_1 + l_2) + a_{11}^2\right)$. По теореме Виета из уравнения (10.2) получим, что $l_1 l_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2,\ l_1 + l_2 = a_{11} + a_{22}$. Подставим эти соотношения в предыдущее равенство: $\dfrac{ab}{a_{12}^2}\left(a_{12}^2 + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 - a_{11}(a_{11} + a_{22}) + a_{11}^2\right) = 0$. Значит, $\overrightarrow{e_1} \perp \overrightarrow{e_2}$.

Замечание. В примере, рассмотренном в лекции 9, были найдены собственные векторы симметрической матрицы и обращено внимание на то, что они оказались попарно ортогональными.

Определение 10.3. **Матрицей квадратичной формы** (10.1) называется симметрическая матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$. (10.3)

Таким образом, все собственные числа матрицы квадратичной формы действительны, а все собственные векторы ортогональны. Если все собственные числа различны, то из трех нормированных собственных векторов матрицы (10.3) можно построить базис в трехмерном пространстве. В этом базисе квадратичная форма будет иметь особый вид, не содержащий произведений переменных.

Приведение квадратичной формы к каноническому виду.

Определение 10.4. **Каноническим видом** квадратичной формы (10.1) называется следующий вид: $\overline{f}(x_1, x_2, x_3) = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2$. (10.4)

Покажем, что в базисе из собственных векторов квадратичная форма (10.1) примет канонический вид. Пусть

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e_1'} &= b_{11}\overrightarrow{e_1} + b_{21}\overrightarrow{e_2} + b_{31}\overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{e_2'} &= b_{12}\overrightarrow{e_1} + b_{22}\overrightarrow{e_2} + b_{32}\overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{e_3'} &= b_{13}\overrightarrow{e_1} + b_{23}\overrightarrow{e_2} + b_{33}\overrightarrow{e_3} \end{aligned}$$

\- нормированные собственные векторы, соответствующие собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ матрицы (10.3) в ортонормированном базисе $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Тогда матрицей перехода от старого базиса к новому будет матрица

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$. В новом базисе матрица *A* примет диагональный вид (9.7) (по свойству собственных векторов). Таким образом, преобразовав координаты по формулам:

$$\begin{aligned} x_1' &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 \\ x_2' &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3\ , \\ x_3' &= b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 \end{aligned}$$

получим в новом базисе канонический вид квадратичной формы с коэффициентами, равными собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\overline{f}(x_1', x_2', x_3') = l_1 x_1'^2 + l_2 x_2'^3 + l_3 x_3'^2. \quad (10.5)$$

Замечание 1. С геометрической точки зрения рассмотренное преобразование координат представляет собой поворот координатной системы, совмещающий старые оси координат с новыми.

Замечание 2. Если какие-либо собственные числа матрицы (10.3) совпадают, к соответствующим им ортонормированным собственным векторам можно добавить единичный вектор, ортогональный каждому из них, и построить таким образом базис, в котором квадратичная форма примет канонический вид.

Пример.
Приведем к каноническому виду квадратичную форму

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz.$$

Ее матрица имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. В примере, рассмотренном в лекции 9, найдены собственные числа и ортонормированные собственные векторы этой матрицы:

$\{\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\}$, $\{\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\}$, $\{\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\}$. Составим матрицу перехода к базису из этих векторов:

$B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ (порядок векторов изменен, чтобы они образовали правую тройку). Преобразуем координаты по формулам:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'$$
$$y = \frac{2}{\sqrt{6}}y' - \frac{1}{\sqrt{3}}z'$$
$$z = -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'$$

. Получим:

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz = (\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z')^2 + 5(\frac{2}{\sqrt{6}}y' - \frac{1}{\sqrt{3}}z')^2 + (-\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y'$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{3}}z')^2 + 2(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z')(\frac{2}{\sqrt{6}}y' - \frac{1}{\sqrt{3}}z') + 6(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z')(-\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y'$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{3}}z') + 2(\frac{2}{\sqrt{6}}y' - \frac{1}{\sqrt{3}}z')(-\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z') = -2x'^2 + 6y'^2 + 3z'^2$$

Итак, квадратичная форма приведена к каноническому виду с коэффициентами, равными собственным числам матрицы квадратичной формы.

Лекция 11.

Кривые второго порядка. Эллипс, гипербола и парабола, их свойства и канонические уравнения. Приведение уравнения второго порядка к каноническому виду.

Определение 11.1. **Кривыми второго порядка** на плоскости называются линии пересечения кругового конуса с плоскостями, не проходящими через его вершину.

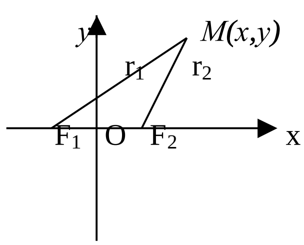
Если такая плоскость пересекает все образующие одной полости конуса, то в сечении получается **эллипс**, при пересечении образующих обеих полостей – **гипербола**, а если секущая плоскость параллельна какой-либо образующей, то сечением конуса является **парабола**.

Замечание. Все кривые второго порядка задаются уравнениями второй степени от двух переменных.

Эллипс.

Определение 11.2. **Эллипсом** называется множество точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых **фокусами**, есть величина постоянная.

Замечание. При совпадении точек F_1 и F_2 эллипс превращается в окружность.



Выведем уравнение эллипса, выбрав декартову систему координат так, чтобы ось Ox совпала с прямой F_1F_2, начало координат – с серединой отрезка F_1F_2. Пусть длина этого отрезка равна $2c$, тогда в выбранной системе координат $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$. Пусть точка $M(x, y)$ лежит на эллипсе, и сумма расстояний от нее до F_1 и F_2 равна $2a$.

Тогда $r_1 + r_2 = 2a$, но $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, поэтому $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$. Введя обозначение $b^2 = a^2 - c^2$ и проведя несложные алгебраические преобразования, получим **каноническое уравнение эллипса**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (11.1)$$

Определение 11.3. **Эксцентриситетом** эллипса называется величина $e=c/a$ (11.2)

Определение 11.4. **Директрисой** D_i эллипса, отвечающей фокусу F_i, называется прямая, расположенная в одной полуплоскости с F_i относительно оси Oy перпендикулярно оси Ox на расстоянии a/e от начала координат.

Замечание. При ином выборе системы координат эллипс может задаваться не каноническим уравнением (11.1), а уравнением второй степени другого вида.

Свойства эллипса:

1) Эллипс имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии (главные оси эллипса) и центр симметрии (центр эллипса). Если эллипс задан каноническим уравнением, то его главными осями являются оси координат, а центром – начало координат. Поскольку длины отрезков, образованных

пересечением эллипса с главными осями, равны $2a$ и $2b$ ($2a>2b$), то главная ось, проходящая через фокусы, называется большой осью эллипса, а вторая главная ось – малой осью.

2) Весь эллипс содержится внутри прямоугольника $|x| \le a, |y| \le b$.
3) Эксцентриситет эллипса $e < 1$.

Действительно, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \le 1$.

4) Директрисы эллипса расположены вне эллипса (так как расстояние от центра эллипса до директрисы равно a/e, а $e<1$, следовательно, $a/e>a$, а весь эллипс лежит в прямоугольнике $|x| \le a, |y| \le b$.)

5) Отношение расстояния r_i от точки эллипса до фокуса F_i к расстоянию d_i от этой точки до отвечающей фокусу директрисы равно эксцентриситету эллипса.

Доказательство.

Расстояния от точки $M(x, y)$ до фокусов эллипса можно представить так:

$r_1 = a + \frac{c}{a}x = a + ex, r_2 = a - \frac{c}{a}x = a - ex.$ Составим уравнения директрис:

$-x - \frac{a}{e} = 0$ (D_1), $x - \frac{a}{e} = 0$ (D_2). Тогда $d_1 = \frac{a + ex}{e}, d_2 = \frac{a - ex}{e}$. Отсюда $r_i / d_i = e$, что и требовалось доказать.

Гипербола.

Определение 11.5. **Гиперболой** называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых **фокусами**, есть величина постоянная.

Выведем каноническое уравнение гиперболы по аналогии с выводом уравнения эллипса, пользуясь теми же обозначениями.

$|r_1 - r_2| = 2a$, откуда $|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a.$ Если обозначить $b^2 = c^2 - a^2$, отсюда можно получить

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{- } \textbf{каноническое уравнение гиперболы}. \qquad (11.3)$$

Определение 11.6. **Эксцентриситетом** гиперболы называется величина $e = c / a$.

Определение 11.7. **Директрисой** D_i гиперболы, отвечающей фокусу F_i, называется прямая, расположенная в одной полуплоскости с F_i относительно оси Oy перпендикулярно оси Ox на расстоянии a / e от начала координат.

Свойства гиперболы:

1) Гипербола имеет две оси симметрии (главные оси гиперболы) и центр симметрии (центр гиперболы). При этом одна из этих осей пересекается с гиперболой в двух точках, называемых вершинами гиперболы. Она называется действительной осью гиперболы (ось Ox для канонического выбора координатной системы). Другая ось не имеет общих точек с гиперболой и называется ее мнимой осью (в канонических координатах – ось Oy). По обе стороны от нее расположены правая и левая ветви гиперболы. Фокусы гиперболы располагаются на ее действительной оси.
2) Ветви гиперболы имеют две асимптоты, определяемые уравнениями

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

3) Наряду с гиперболой (11.3) можно рассмотреть так называемую сопряженную гиперболу, определяемую каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1\ , \qquad (11.3\text{`})$$

для которой меняются местами действительная и мнимая ось с сохранением тех же асимптот.

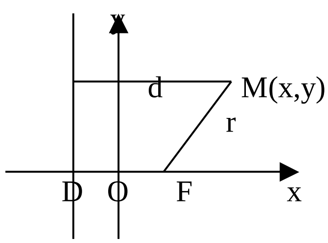
4) Эксцентриситет гиперболы $e > 1$.

5) Отношение расстояния r_i от точки гиперболы до фокуса F_i к расстоянию d_i от этой точки до отвечающей фокусу директрисы равно эксцентриситету гиперболы.

Доказательство можно провести так же, как и для эллипса.

Парабола.

Определение 11.8. **Параболой** называется множество точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки F этой плоскости равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой. Точка F называется **фокусом** параболы, а прямая – ее **директрисой**.



Для вывода уравнения параболы выберем декартову систему координат так, чтобы ее началом была середина перпендикуляра FD, опущенного из фокуса на директрису, а координатные оси располагались параллельно и перпендикулярно директрисе. Пусть длина отрезка FD равна p. Тогда из равенства $r = d$ следует, что

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x, \text{ поскольку}$$

$r = \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2}, d = \frac{p}{2} + x.$ Алгебраическими преобразованиями это уравнение можно привести к виду: $y^2 = 2px$, (11.4)

называемому **каноническим уравнением параболы**. Величина p называется **параметром** параболы.

Свойства параболы:

1) Парабола имеет ось симметрии (ось параболы). Точка пересечения параболы с осью называется вершиной параболы. Если парабола задана каноническим уравнением, то ее осью является ось Ox, а вершиной – начало координат.
2) Вся парабола расположена в правой полуплоскости плоскости Oxy.

Замечание. Используя свойства директрис эллипса и гиперболы и определение параболы, можно доказать следующее утверждение:

Множество точек плоскости, для которых отношение e расстояния до некоторой фиксированной точки к расстоянию до некоторой прямой есть величина постоянная, представляет собой эллипс (при e<1), гиперболу (при e>1) или параболу (при e=1).

Приведение уравнения второго порядка к каноническому виду.

Определение 11.9. Линия, определяемая общим уравнением второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0\ , \qquad (11.5)$$

называется **алгебраической линией второго порядка**.
Для квадратичной формы $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ можно задать матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}. \qquad (11.6)$$

Для того, чтобы перейти к новой системе координат, в которой уравнение линии будет иметь канонический вид, необходимо провести два преобразования:

1) поворот координатных осей на такой угол, чтобы их направление совпало с направлением осей симметрии кривой (если она имеет две оси);
2) параллельный перенос, при котором начало координат совмещается с центром симметрии кривой (если он существует).

Замечание. Для параболы новые оси координат должны располагаться параллельно и перпендикулярно директрисе, а начало координат – совпасть с вершиной параболы.

Поскольку в канонических уравнениях кривых второго порядка отсутствуют произведения переменных, необходимо перейти к координатной системе, определяемой базисом из ортонормированных собственных векторов матрицы A. В этом базисе уравнение (11.5) примет вид:

$$l_1 x'^2 + l_2 y'^2 + 2\tilde{b}_1 x' + 2\tilde{b}_2 y' + \tilde{c} = 0$$ (в предположении, что $\lambda_{1,2}$ не равны 0).

Зададим последующий параллельный перенос формулами:

$x'' = x' + \dfrac{\tilde{b}_1}{l_1}$, $y'' = y' + \dfrac{\tilde{b}_2}{l_2}$. Получим в новой координатной системе уравнение

$$l_1 x''^2 + l_2 y''^2 = \tilde{\tilde{c}}. \qquad (11.7)$$

Рассмотрим возможные геометрические образы, определяемые этим уравнением в зависимости от знаков λ_1, λ_2 и $\tilde{\tilde{c}}$:

1) если собственные числа матрицы A λ_1 и λ_2 и $\tilde{\tilde{c}}$ одного знака, уравнение (11.7) представляет собой каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1, \text{ где } \quad a = \sqrt{\frac{\tilde{\tilde{c}}}{l_1}}, b = \sqrt{\frac{\tilde{\tilde{c}}}{l_2}}$$

(случаи $\tilde{\tilde{c}} = 0$ и $\tilde{\tilde{c}}$, имеющего знак, противоположный знаку λ_1, λ_2, будут рассмотрены в следующей лекции).

2) если λ_1 и λ_2 имеют разные знаки, уравнение (11.7) является каноническим уравнением гиперболы:

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = -1,$$ в зависимости от знака $\tilde{\tilde{c}}$.

В случае, когда одно из собственных чисел матрицы A равно 0, уравнение (11.5) в результате двух преобразований координат можно привести к виду:

$$y''^2 = 2\tilde{\tilde{b}}x'', \qquad (11.8)$$

являющимся каноническим уравнением параболы.

Пример.
Приведем к каноническому виду уравнение второго порядка

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0.$$

Матрица квадратичной формы $3x^2 + 10xy + 3y^2$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем ее собственные числа и собственные векторы. Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 3-l & 5 \\ 5 & 3-l \end{vmatrix} = 0,\ l^2 - 6l - 16 = 0,\ l_1 = 8,\ l_2 = -2.$ Для координат собственного вектора $\boldsymbol{e_1}$, соответствующего λ_1, получим с учетом нормировки: $\begin{cases} -5x_1 + 5y_1 = 0 \\ x_1^2 + y_1^2 = 1 \end{cases}$, откуда $\boldsymbol{e_1} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$. Аналогично найдем $\boldsymbol{e_2}$: $\begin{cases} 5x_2 + 5y_2 = 0 \\ x_2^2 + y_2^2 = 1 \end{cases}$, $\boldsymbol{e_2} = \{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$. Составим матрицу перехода к новому базису, столбцами которой будут координаты собственных векторов: $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Тогда

$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{cases}$. Подставив эти выражения в исходное уравнение, получим его вид в новой системе координат: $8x'^2 - 2y'^2 - 8\sqrt{2}x' - 6\sqrt{2}y' - 13 = 0$. Заметим, что коэффициентами при x^2 и y^2 являются λ_1 и λ_2.

Преобразуем полученное уравнение: $8(x'^2 - \sqrt{2}x' + \frac{1}{2}) - 2(y'^2 + 3\sqrt{2}y' + \frac{9}{2}) - 8 = 0,$

$8(x' - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 - 2(y' + \frac{3}{\sqrt{2}})^2 = 8.$ Зададим параллельный перенос формулами: $x'' = x' - \frac{1}{\sqrt{2}}, y''y = y' + \frac{3}{\sqrt{2}}$. Получим уравнение: $8x''^2 - 2y''^2 = 8$, а после деления на 8:

$x''^2 - \frac{y''^2}{4} = 1$ - каноническое уравнение гиперболы.

Лекция 12.
Классификация кривых второго порядка на плоскости. Поверхности второго порядка. Канонические уравнения основных поверхностей второго порядка: эллипсоидов, гиперболоидов и параболоидов.

Классификация кривых второго порядка.

Рассмотрим общее уравнение второго порядка (11.5):

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

и выясним, какие геометрические образы на плоскости могут задаваться этим уравнением.

1. Если собственные числа матрицы A λ_1 и λ_2 одного знака, уравнение (11.5) называется уравнением **эллиптического типа**. Его можно привести к виду (11.7): $l_1x''^2 + l_2y''^2 = \approx{c}$, которое, в свою очередь, преобразуется в следующую форму:

а) если $\approx{c}$ имеет тот же знак, что и $\lambda_{1,2}$, при делении на $\approx{c}$ получаем

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$$ - каноническое уравнение **эллипса.**

б) если $\tilde{\tilde{c}}$ =0, уравнение $l_1 x''^2 + l_2 y''^2 = 0$ имеет единственное решение: $x'' = y'' = 0$, определяющее **точку на плоскости**.

в) если знак $\tilde{\tilde{c}}$ противоположен знаку $\lambda_{1,2}$, уравнение после деления на $\tilde{\tilde{c}}$ примет вид:

$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = -1$. Множество его решений пусто (иногда это пустое множество называют **мнимым эллипсом**).

2. Если собственные числа матрицы A λ_1 и λ_2 разных знаков, уравнение (11.5) называется уравнением **гиперболического типа**.

а) при $\tilde{\tilde{c}} \neq 0$ оно сводится к одному из двух видов:

$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1$ или $\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = -1$, в зависимости от знака $\tilde{\tilde{c}}$. Оба этих уравнения определяют **гиперболу**.

б) При $\tilde{\tilde{c}}$ =0 получаем уравнение $\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 0$, эквивалентное двум линейным уравнениям: $\frac{x''}{a} = \frac{y''}{b}$ и $\frac{x''}{a} = -\frac{y''}{b}$, задающим **пару пересекающихся прямых**.

3. Если одно из собственных чисел равно 0, уравнение (11.5) называется уравнением **параболического** типа, и его можно привести к одному из следующих видов:

а) к уравнению (11.8): $y''^2 = 2\tilde{\tilde{b}} x''$, определяющему **параболу**;

б) к уравнению $y''^2 = 2\tilde{\tilde{b}}^2$, или $y'' = \pm\tilde{\tilde{b}}\sqrt{2}$, задающему **пару параллельных прямых**;

в) к уравнению $y''^2 = 0$, определяющему **одну прямую** (или пару совпадающих прямых);

г) к уравнению $y''^2 = -2\tilde{\tilde{b}}^2$, не имеющему решений и, следовательно, не определяющему никакого геометрического образа.

Поверхности второго порядка.

Определение 12.1. **Поверхностью второго порядка** называется множество точек трехмерного пространства, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению вида:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0 \quad - \qquad (12.1)$$

уравнению второй степени от трех неизвестных, называемому **общим уравнением поверхности второго порядка**.

Если найти собственные числа и нормированные собственные векторы матрицы квадратичной формы $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$ и перейти к системе координат, определяемой базисом из ортонормированных собственных векторов, уравнение (12.1) можно привести к одному из следующих видов:

1. Если λ_1, λ_2, λ_3 – одного знака, уравнение (12.1) есть уравнение эллиптического типа и приводится к канонической форме:

а) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad - \qquad (12.2)$$

каноническое уравнение **эллипсоида**.

Замечание, Если два собственных числа совпадают, эллипсоид называется эллипсоидом вращения и представляет собой поверхность, полученную в результате вращения эллипса вокруг одной из его осей. Если все собственные числа равны, уравнение (12.2) становится уравнением сферы.

б) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \text{ -} \qquad (12.3)$$

уравнение задает **точку в пространстве**;

в) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \text{ -} \qquad (12.4)$$

пустое множество.

2. Если собственные числа разных знаков, уравнение (12.1) приводится к каноническому виду:

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ - каноническое уравнение **однополостного гиперболоида,** (12.5)

б) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \text{ -} \qquad (12.6)$$

- каноническое уравнение **двуполостного гиперболоида**,

в) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \text{ -} \qquad (12.7)$$

уравнение **конуса второго порядка**.

3. Одно из собственных чисел равно 0. При этом с помощью преобразований координат можно получить следующие формы уравнения (12.1):

а) $$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \text{ -} \qquad (12.8)$$

каноническое уравнение **эллиптического параболоида**,

б) $$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} \text{ -} \qquad (12.9)$$

каноническое уравнение **гиперболического параболоида**

и уравнения цилиндрических поверхностей:

в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - **эллиптический цилиндр**, (12.10)

г) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ - **гиперболический цилиндр**. (12.11)

Наконец, уравнение может определять **пару плоскостей**:

д) $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0. \qquad (12.12)$$

4. Если два собственных числа равны 0, уравнение (12.1) приводится к одному из следующих видов:

а) $a_{33}z^2+2qy=0$ - **параболический цилиндр**, (12.13)

б) $a_{33}z^2-r^2=0$ - **пара параллельных плоскостей**, (12.14)

в) $a_{33}z^2+r^2=0$ - пустое множество.