

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университете)

Кафедра "Высшая математика"

Пределы. Производные.
Функции нескольких переменных
Методические указания и варианты
контрольных работ

Составители: Выск Н.Д.,
Гуторина Т.А.

Москва

2017

Данное методическое пособие предназначено для студентов вечернего отделения, изучающих в курсе математики теорию пределов и основы дифференциального исчисления. Пособие содержит краткую теоретическую информацию, примеры решения задач и варианты заданий, которые могут быть использованы для проведения аудиторных или домашних контрольных работ.

Пределы функций

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 .

Число A называется **пределом** функции $y = f(x)$ при x , стремящемся к x_0 , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$.

Обозначение: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Функция $y = f(x)$ имеет **бесконечный предел** при x , стремящемся к x_0 (стремится к бесконечности, является бесконечно большой), если $\forall M > 0 \exists \delta > 0$ такое, что $|f(x)| > M$ при $|x - x_0| < \delta$.

Обозначение: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Число A называется **пределом функции $y = f(x)$ на бесконечности**, если $\forall \varepsilon > 0 \exists X > 0: |f(x) - A| < \varepsilon$ при $x > X$ ($\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$), при $x < -X$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$), при $|x| > X$ ($\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$).

Функция $y = \alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

Сравнение бесконечно малых:

1. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A, |A| < \infty$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми **одного порядка**. В частности, если $A=1$, говорят, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – **эквивалентные** бесконечно малые.
2. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ называется бесконечно малой **более высокого порядка** по сравнению с $\beta(x)$.
3. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^n(x)} = A, |A| < \infty$, то $\alpha(x)$ есть бесконечно малая порядка n по сравнению с $\beta(x)$.

Для бесконечно больших можно ввести такую же систему классификации, как и для бесконечно малых, а именно:

1. Бесконечно большие $f(x)$ и $g(x)$ считаются величинами одного порядка, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A, |A| < \infty.$$

2. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, то $f(x)$ считается бесконечно большой более высокого порядка, чем $g(x)$.

3. Бесконечно большая $f(x)$ называется величиной k -го порядка

относительно бесконечно большой $g(x)$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g^k(x)} = A, |A| < \infty$.

Отметим, что a^x – бесконечно большая (при $a > 1$ и $x \rightarrow \infty$) более высокого порядка, чем x^k для любого k , а $\log_a x$ – бесконечно большая низшего порядка, чем любая степень x^k .

Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$, то $1/\alpha(x)$ – бесконечно большая при $x \rightarrow x_0$.

Первый замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Следствия из первого замечательного предела.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k \lim_{kx \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} = k \cdot 1 = k.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} kx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} \frac{1}{\cos kx} = k \cdot 1 = k.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{\sin mx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} \frac{x}{\sin mx} = k \frac{1}{m} = \frac{k}{m}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} kx}{\operatorname{tg} mx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} kx}{x} \frac{x}{\operatorname{tg} mx} = \frac{k}{m}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1, \text{ где } y = \arcsin x.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = 1, \text{ где } y = \operatorname{arctg} x.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \right)^2 = 2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Второй замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Следствия из второго замечательного предела.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{1+x}} = \ln(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{1+x}}) = \ln e = 1.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} = \ln a \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \ln a, \text{ где } a > 0, y = a^x - 1.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1.$$

Используя 1-й и 2-й замечательные пределы и их следствия, можно указать бесконечно малые функции при $x \rightarrow 0$, эквивалентные x : $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arcsin} x$, $\operatorname{arctg} x$, $\ln(1+x)$, $e^x - 1$.

При раскрытии неопределенности вида $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$, то есть предела отношения двух бесконечно малых, можно каждую из них заменять на эквивалентную – эта операция не влияет на существование и величину предела.

Примеры решения задач

Проблемы при вычислении пределов связаны с так называемым раскрытием неопределенностей вида $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$, $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$, $\{0 \cdot \infty\}$, $\{\infty - \infty\}$, $\{1^\infty\}$ и других (имеется в виду, что под знаком предела стоит отношение двух бесконечно малых или бесконечно больших, произведение бесконечно большой на бесконечно малую и т.д.).

Пример 1.

Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6}$.

Перед нами так называемая неопределенность типа $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$, так как при $x = 3$ и числитель, и знаменатель дроби равны нулю. Следовательно, $x = 3$ является корнем и числителя, и знаменателя. Поэтому можно разложить обе части дроби на множители и сократить общий множитель $(x - 3)$:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x-2} = \frac{3+1}{3-2} = 4.$$

Пример 2.

Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5}{x^3 - 2x^2 - x - 8}$.

На этот раз перед нами неопределенность вида $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$ – обе части дроби при x , стремящемся к бесконечности, неограниченно возрастают. Для того чтобы избавиться от этой неопределенности, разделим каждое слагаемое числителя

и знаменателя на x^3 – старшую степень знаменателя:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5}{x^3 - 2x^2 - x - 8} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}}{1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{8}{x^3}}.$$

Учитывая, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^a} = 0$ при $a > 0$, получим: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}}{1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{8}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0$.

Пример 3.

Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{\sqrt[3]{x+1} - 2}$.

Домножим числитель и знаменатель на выражения $\sqrt{x+2} + 3$ и $\sqrt[3]{(x+1)^2} + 2\sqrt[3]{x+1} + 4$ и применим формулы разности квадратов и разности кубов:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{\sqrt[3]{x+1} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(\sqrt{x+2} - 3)(\sqrt{x+2} + 3)(\sqrt[3]{(x+1)^2} + 2\sqrt[3]{x+1} + 4)}{(\sqrt[3]{x+1} - 2)(\sqrt[3]{(x+1)^2} + 2\sqrt[3]{x+1} + 4)(\sqrt{x+2} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x+2-9)(\sqrt[3]{(x+1)^2} + 2\sqrt[3]{x+1} + 4)}{(x+1-8)(\sqrt{x+2} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x-7)(\sqrt[3]{(x+1)^2} + 2\sqrt[3]{x+1} + 4)}{(x-7)(\sqrt{x+2} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + 2\sqrt[3]{x+1} + 4}{\sqrt{x+2} + 3} = \frac{4+4+4}{3+3} = \frac{12}{6} = 2. \end{aligned}$$

Пример 4.

Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2+5} - \sqrt{x^2-7})$.

Домножим и разделим данное выражение на $\sqrt{x^2+5} + \sqrt{x^2-7}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2+5} - \sqrt{x^2-7}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(\sqrt{x^2+5} - \sqrt{x^2-7})(\sqrt{x^2+5} + \sqrt{x^2-7})}{\sqrt{x^2+5} + \sqrt{x^2-7}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x^2+5-x^2+7)}{\sqrt{x^2+5} + \sqrt{x^2-7}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12x}{\sqrt{x^2+5} + \sqrt{x^2-7}}. \end{aligned}$$

Теперь разделим обе части дроби на $|x| = -x$ (при этом подкоренные выражения нужно разделить на x^2):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12x}{\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{x^2 - 7}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-12}{\sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{7}{x^2}}} = -\frac{12}{2} = -6.$$

Пример 5.

Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 7x}{x \sin 3x}$.

Преобразуем в числителе разность косинусов в произведение:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 7x}{x \sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 6x \sin x}{x \sin 3x}.$$

Теперь разделим обе части дроби на x^2 и используем 1-й замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 6x \sin x}{x \sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \frac{\sin 6x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin 3x}{x}} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 1}{3} = 4.$$

Пример 6.

Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x + \operatorname{tg} 4x}{\pi - x}$.

Сделаем замену переменной: $t = \pi - x$. Тогда, используя периодичность тригонометрических функций и формулы приведения, получим:

$$x = \pi - t, \quad \sin 3x = \sin(3\pi - 3t) = \sin(\pi - 3t) = \sin 3t, \\ \operatorname{tg} 4x = \operatorname{tg}(4\pi - 4t) = \operatorname{tg}(-4t) = -\operatorname{tg} 4t, \quad t \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \pi.$$

Подставим эти результаты в выражение, стоящее под знаком предела:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x + \operatorname{tg} 4x}{\pi - x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 3t - \operatorname{tg} 4t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3t}{t} - \frac{\operatorname{tg} 4t}{t} \right) = 3 - 4 = -1.$$

Пример 7.

Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 4}{x^2 - 3} \right)^{4x}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 4}{x^2 - 3} \right)^{4x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x^2 - 3) + (2x - 1)}{x^2 - 3} \right)^{4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x - 1}{x^2 - 3} \right)^{4x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{2x - 1}{x^2 - 3} \right)^{\frac{x^2 - 3}{2x - 1}} \right)^{\frac{2x - 1}{x^2 - 3} \cdot 4x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 - 4x}{x^2 - 3}} = e^8. \end{aligned}$$

Пример 8.

Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 12x)}{\sin 4x}$.

Умножим обе части дроби на $\sin 12x$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 12x)}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 12x)}{\sin 12x} \cdot \frac{\sin 12x}{\sin 4x} = 1 \cdot 3 = 3.$$

Пример 9.

Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x + \operatorname{tg} 3x}$.

Вынесем за скобки в числителе e^x и разделим обе части дроби на x :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x + \operatorname{tg} 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{\frac{e^x - 1}{x}}{1 + \frac{\operatorname{tg} 3x}{x}} = 1 \cdot \frac{1}{1 + 3} = \frac{1}{4}.$$

Дифференцирование функций одной переменной

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, заданную в окрестности точки x_0 .

Если существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, то он называется

производной функции f в точке x_0 .

Обозначение: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Правила дифференцирования

Пусть при рассматриваемых значениях x существуют производные функций $f(x)$ и $g(x)$, то есть эти функции являются дифференцируемыми при данных значениях аргумента. Сформулируем некоторые свойства производных.

1. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

2. $(kf(x))' = kf'(x)$, где $k = \text{const}$.

3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

4. Если $g(x) \neq 0$, то $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

5. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет при некотором значении x производную $u_x' = \varphi'(x)$, а функция $y = f(u)$ имеет при соответствующем значении u производную $y_u' = f'(u)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ тоже имеет при данном значении x производную, равную

$$y'(x) = f'(u) \cdot u'(x).$$

Таблица основных производных:

№	$f(x)$	$f'(x)$	№	$f(x)$	$f'(x)$
1	C	0	9	ctgx	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
2	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	10	shx	chx
3	a^x	$a^x \ln a$	11	chx	shx
4	e^x	e^x	12	thx	$\frac{1}{ch^2 x}$
5	lnx	$\frac{1}{x}$	13	cthx	$\frac{1}{sh^2 x}$
6	sinx	cosx	14	arcsinx	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7	cosx	-sinx	15	arccosx	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
8	tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$	16	arctgx	$\frac{1}{1+x^2}$
			17	arcctgx	$-\frac{1}{1+x^2}$

Иногда полезно использовать так называемую формулу логарифмического дифференцирования. Пусть $f(x) > 0$ на некотором множестве значений аргумента и дифференцируема на этом множестве. Тогда по формуле производной сложной функции

$$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x), \text{ откуда } f'(x) = f(x) \cdot (\ln f(x))'.$$

Производной n -го порядка (или n -й производной) от функции $f(x)$ называется производная (первого порядка) от ее $(n-1)$ -й производной.

Обозначение: $y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = f^{(n)}(x)$. Производные 2-го и 3-го порядка обозначаются соответственно y'' и y''' .

Производные параметрически заданных функций

Если функция задана как $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, где $x(t)$ и $y(t)$ - дважды дифференцируемые

функции, то производная первого порядка $y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$, а производная

второго порядка $y''(x) = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3}$.

Примеры решения задач

Пример 1. Вычислить производную функции $y = \frac{x + e^x}{x \cos x}$.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x + e^x)'x \cos x - (x + e^x)(x \cos x)'}{(x \cos x)^2} = \\ &= \frac{(1 + e^x)x \cos x - (x + e^x)(\cos x + x(-\sin x))}{x^2 \cos^2 x} = \\ &= \frac{x \cos x + e^x x \cos x - x \cos x - e^x \cos x + x \sin x(x + e^x)}{x^2 \cos^2 x} = \\ &= \frac{e^x \cos x(x - 1) + (x + e^x)x \sin x}{x^2 \cos^2 x}. \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить производную функции $y = \cos \ln(3x^2 - 2)$.

$$\begin{aligned} y &= -\sin \ln(3x^2 - 2) \cdot (\ln(3x^2 - 2))' = -\sin \ln(3x^2 - 2) \cdot \frac{1}{3x^2 - 2} (3x^2 - 2)' = \\ &= -\sin \ln(3x^2 - 2) \cdot \frac{6x}{3x^2 - 2}. \end{aligned}$$

Пример 3. Вычислить производную функции $y = (\arcsin x)^{\cos x}$.

Применим формулу логарифмического дифференцирования:

$$f'(x) = f(x) \cdot (\ln f(x))'.$$

$$y' = (\arcsin x)^{\cos x} \cdot (\ln(\arcsin x)^{\cos x})' = (\arcsin x)^{\cos x} \cdot (\cos x \cdot \ln(\arcsin x))' =$$

$$= (\arcsin x)^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln(\arcsin x) + \cos x \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{\arcsin x} \right).$$

Пример 4. Найти вторую производную от функции $y = \sqrt{3-x^2}$.

$$y' = \left((3-x^2)^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} (3-x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{3-x^2}};$$

$$y'' = -\left(\frac{x}{\sqrt{3-x^2}} \right)' = -\frac{\sqrt{3-x^2} - \frac{x(-2x)}{2\sqrt{3-x^2}}}{3-x^2} = -\frac{3-x^2+x^2}{\sqrt{(3-x^2)^3}} = -\frac{3}{\sqrt{(3-x^2)^3}}.$$

Пример 5. Найти производную 4-го порядка от функции

$$y = (3x^3 - 2x^2 + x + 5) \ln x.$$

$$y' = (9x^2 - 4x + 1) \ln x + (3x^3 + 2x^2 + x + 5) \frac{1}{x} =$$

$$= (9x^2 - 4x + 1) \ln x + 3x^2 + 2x + 1 + \frac{5}{x};$$

$$y'' = (18x - 4) \ln x + (9x^2 - 4x + 1) \frac{1}{x} + 6x + 2 - \frac{5}{x^2} =$$

$$= (18x - 4) \ln x + 9x - 4 + \frac{1}{x} + 6x + 2 - \frac{5}{x^2} = (18x - 4) \ln x + 15x - 2 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2};$$

$$y''' = 18 \ln x + (18x - 4) \frac{1}{x} + 15 - \frac{1}{x^2} + \frac{10}{x^3} = 18 \ln x + 23 - \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{10}{x^3};$$

$$y^{(4)} = \frac{18}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{30}{x^4} = \frac{2(9x^3 + 2x^2 + x - 15)}{x^4}.$$

Применение производных к исследованию функций

Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей (убывающей)** на $[ab]$, если

$$\forall x_1, x_2 \in [ab] \text{ таких, что } x_1 < x_2, f(x_1) < f(x_2) \text{ (} f(x_1) > f(x_2) \text{)}.$$

Если функция $f(x)$, дифференцируемая на $[ab]$, возрастает на этом отрезке, то $f'(x) \geq 0$ на $[ab]$. Если $f(x)$ непрерывна на $[ab]$ и дифференцируема на (ab) , причем $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то эта функция возрастает на отрезке $[ab]$.

Если $f(x)$ убывает на $[ab]$, то $f'(x) \leq 0$ на $[ab]$. Если $f'(x) < 0$ на (ab) , то $f(x)$ убывает на $[ab]$.

Точка x_0 называется **точкой максимума (минимума)** функции $y = f(x)$, если $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$) для всех x из некоторой δ -окрестности точки x_0 .

Точки максимума и минимума функции называются ее **точками экстремума**.

Необходимое условие экстремума: пусть функция $f(x)$ задана в некоторой окрестности точки x_0 . Если x_0 является точкой экстремума функции, то $f'(x_0) = 0$ или не существует.

Если функция определена в некоторой окрестности точки x_0 и ее производная в этой точке равна нулю или не существует, точка x_0 называется **критической точкой** функции.

Достаточные условия экстремума.

1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 , дифференцируема в проколотой окрестности этой точки и с каждой стороны от данной точки $f'(x)$ сохраняет постоянный знак. Тогда:

- 1) если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, точка x_0 является точкой максимума;
- 2) если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, точка x_0 является точкой минимума;
- 3) если $f'(x)$ не меняет знак в точке x_0 , эта точка не является точкой экстремума.

2. Пусть $f'(x_0) = 0$ и у рассматриваемой функции существует непрерывная вторая производная в некоторой окрестности точки x_0 . Тогда x_0 является точкой максимума, если $f''(x_0) < 0$, или точкой минимума, если $f''(x_0) > 0$.

3. Пусть функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0 и $f^{(k)}(x_0) = 0$ при $k = 1, 2, \dots, n-1$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда, если n – четное число ($n = 2m$), функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, а именно максимум при $f^{(2m)}(x_0) < 0$ и минимум при $f^{(2m)}(x_0) > 0$. Если же n – нечетное число ($n = 2m - 1$), то точка x_0 не является точкой экстремума.

Кривая называется **обращенной выпуклостью вверх** на интервале (ab) , если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале.

Кривая называется **обращенной выпуклостью вниз** на интервале (ab) , если все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале.

Если $f''(x) < 0$ во всех точках интервала (ab) , то кривая $y = f(x)$ обращена выпуклостью вверх на этом интервале. Если $f''(x) > 0$ во всех точках интервала (ab) , то кривая $y = f(x)$ обращена выпуклостью вниз на этом интервале.

Точка, отделяющая часть непрерывной кривой, обращенную выпуклостью вверх, от части, обращенной выпуклостью вниз, называется **точкой перегиба**.

Если в точке перегиба существует касательная к кривой, то в этой точке она пересекает кривую, потому что по одну сторону от данной точки кривая проходит выше касательной, а по другую – ниже.

Необходимое условие точки перегиба: если в точке x_0 перегиба кривой, являющейся графиком функции $y = f(x)$, существует вторая производная $f''(x)$, то $f''(x_0) = 0$.

Примеры решения задач

Пример 1. Найти интервалы возрастания функции $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$.

Область определения функции: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

Найдем производную и исследуем ее знак.

$$y' = \frac{2x(1-x^2) - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}.$$

$y' > 0$ при $x > 0$, поэтому с учетом области определения интервалы возрастания: $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Пример 2. Найти точку максимума функции $y = x^3 + 3x^2 - 24x + 5$.

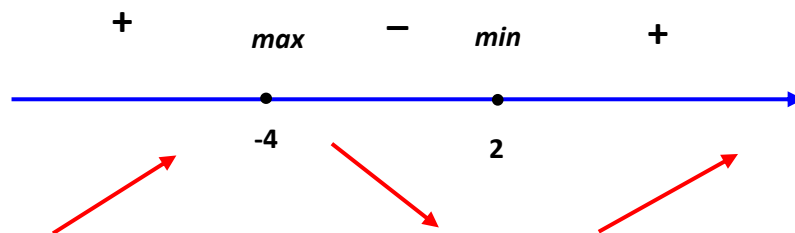
Область определения функции: $(-\infty, +\infty)$.

Найдем критические точки функции:

$$y' = 3x^2 + 6x - 24 = 3(x^2 + 2x - 8), \quad y' = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = -4, \quad x = 2 -$$

критические точки.

Исследуем знак производной на интервалах, разделенных критическими точками:



Точка максимума: $x = -4$.

Пример 3. Найти интервалы выпуклости вниз функции $y = \frac{x^2}{9} - \sqrt[3]{x-2}$.

Границами интервалов выпуклости вверх и вниз могут быть не только точки, в которых вторая производная равна нулю, но и точки, в которых она не существует.

Область определения функции: $(-\infty, +\infty)$.

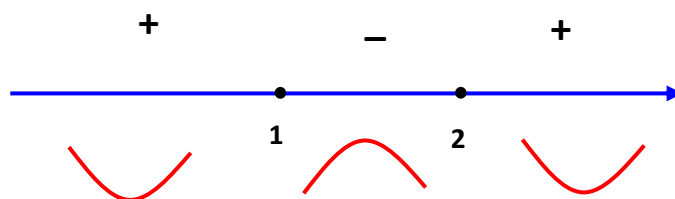
$$y' = \frac{2}{9}x - \frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}}, \quad y'' = \frac{2}{9} - \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)(x-2)^{-\frac{5}{3}} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9}(x-2)^{-\frac{5}{3}}.$$

Представим вторую производную в виде: $y'' = \frac{2}{9} \left(1 + \frac{1}{(x-2)^{\frac{5}{3}}} \right) = \frac{2}{9} \cdot \frac{(x-2)^{\frac{5}{3}} + 1}{(x-2)^{\frac{5}{3}}}$

и исследуем знак полученного выражения. Корень знаменателя: $x = 2$. Найдем корень числителя.

$$(x-2)^{\frac{5}{3}} = -1, \quad x-2 = (-1)^{\frac{3}{5}} = -1, \quad x = 1.$$

Знак второй производной:



Следовательно, интервалы выпуклости вниз: $(-\infty, 1), (2, +\infty)$.

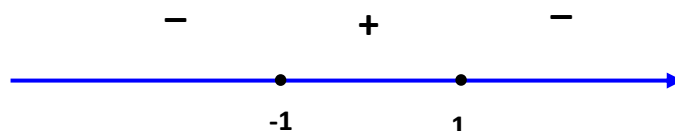
Пример 4. Найти точки перегиба функции $y = \ln(1+x^2)$.

Область определения функции: $(-\infty, +\infty)$.

$$y' = \frac{2x}{1+x^2}, \quad y'' = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0, \quad x = \pm 1.$$

Проверим, меняется ли знак второй производной в найденных точках.



Значит, $x = \pm 1$ – точки перегиба.

Дифференцирование функций нескольких переменных

Рассмотрим изменение функции $f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при задании приращения только одному из ее аргументов – x_i , и назовем его $\Delta_{x_i} f$.

Частной производной функции $f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по аргументу x_i

называется $\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_i} f}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$.

Обозначения: $f'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n), \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Таким образом, частная производная функции нескольких переменных определяется фактически как производная функции *одной переменной* – x_i . Поэтому для нее справедливы все свойства производных, доказанные для функции одной переменной.

При практическом вычислении частных производных пользуемся обычными правилами дифференцирования функции одной переменной, полагая аргумент, по которому ведется дифференцирование, переменным, а остальные аргументы – постоянными.

Дифференцирование сложных функций

Пусть аргументы функции $z = f(x, y)$ являются, в свою очередь, функциями переменных u и v : $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Тогда функция f тоже есть функция от u и v . При этом можно найти ее частные производные по аргументам u и v , не делая непосредственной подстановки $z = f(x(u, v), y(u, v))$ (будем предполагать, что все рассматриваемые функции имеют частные производные по всем своим аргументам):

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда функция $f(x, y)$ является фактически функцией одной переменной t , и можно, заменяя в предыдущих формулах частные производные x и y по u и v на обычные производные по t (разумеется, при условии дифференцируемости функций $x(t)$ и $y(t)$), получить выражение для

$$\frac{df}{dt}; \quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Предположим теперь, что в качестве t выступает переменная x , то есть x и y связаны соотношением $y = y(x)$. При этом, как и в предыдущем случае, функция f является функцией одной переменной x . Используя формулу при t

$$= x \text{ и учитывая, что } \frac{dx}{dx} = 1, \text{ получим, что } \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}.$$

Частные производные высших порядков

Частные производные функции $z = f(x, y)$ являются, в свою очередь, функциями переменных x и y . Следовательно, можно найти их частные производные по этим переменным. Обозначим их так:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y) = (f'_x(x, y))'_x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y) = (f'_x(x, y))'_y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y) = (f'_y(x, y))'_x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y) = (f'_y(x, y))'_y.$$

Таким образом, получены четыре частные производные 2-го порядка.

Каждую из них можно вновь продифференцировать по x и по y и получить восемь частных производных 3-го порядка и т.д. Определим производные высших порядков так:

Частной производной n -го порядка функции нескольких переменных называется первая производная от производной $(n - 1)$ -го порядка.

Частные производные обладают важным свойством: результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования (например, $f''_{xy} = f''_{yx}$).

Производная по направлению. Градиент

Пусть функция $u = f(x, y, z)$ непрерывна в некоторой области D и имеет в этой области непрерывные частные производные. Выберем в рассматриваемой области точку $M(x, y, z)$ и проведем из нее вектор S , направляющие косинусы которого $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$. На векторе S на расстоянии Δs от его начала найдем точку $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$, где

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

Предел отношения $\frac{\Delta u}{\Delta s}$ при $\Delta s \rightarrow 0$ называется **производной от функции $u =$**

$f(x, y, z)$ по направлению вектора S и обозначается $\frac{\partial u}{\partial s}$. Можно показать,

что

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma.$$

Вектор, координатами которого в каждой точке некоторой области являются частные производные функции $u = f(x, y, z)$ в этой точке, называется **градиентом** функции $u = f(x, y, z)$.

Обозначение: $\text{grad } u = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\}$.

Экстремумы функций нескольких переменных.

Необходимое условие экстремума

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется **точкой максимума** функции $z = f(x, y)$, если $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ для всех точек (x, y) из некоторой окрестности точки M_0 .

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется **точкой минимума** функции $z = f(x, y)$, если $f(x_0, y_0) < f(x, y)$ для всех точек (x, y) из некоторой окрестности точки M_0 .

Необходимые условия экстремума: если $M_0(x_0, y_0)$ – точка экстремума функции $z = f(x, y)$, то в этой точке частные производные первого порядка данной функции равны нулю или не существуют.

Точки, принадлежащие области определения функции нескольких переменных, в которых частные производные функции равны нулю или не существуют, называются **стационарными точками** этой функции.

Таким образом, экстремум может достигаться только в стационарных точках, но не обязательно он наблюдается в каждой из них.

Примеры решения задач

Пример 1. Найти частные производные функции

$$z = x^2 - 5xy + 3y^2 + 6x - 3y + 12 \text{ в точке } (1, 1).$$

$$z'_x = 2x - 5y + 6; \quad z'_x(1,1) = 2 - 5 + 6 = 3;$$

$$z'_y = -5x + 6y - 3; \quad z'_y(1,1) = -5 + 6 - 3 = -2.$$

Пример 2. Найти частные производные функции $u = \ln(x^3 + y^2 + z + 1)$.

При дифференцировании функции нескольких переменных по одному из аргументов остальные аргументы выступают как параметры.

$$u'_x = \frac{1}{x^3 + y^2 + z + 1} \cdot (x^3 + y^2 + z + 1)'_x = \frac{3x^2}{x^3 + y^2 + z + 1},$$

$$u'_y = \frac{1}{x^3 + y^2 + z + 1} \cdot (x^3 + y^2 + z + 1)'_y = \frac{2y}{x^3 + y^2 + z + 1},$$

$$u'_z = \frac{1}{x^3 + y^2 + z + 1} \cdot (x^3 + y^2 + z + 1)'_z = \frac{1}{x^3 + y^2 + z + 1}.$$

Пример 3. Найти $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = x^2 \ln y$, $x = \frac{v}{u}$, $y = u + 5v$.

Найдем частные производные, которые используются при вычислении $\frac{\partial z}{\partial v}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \ln y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{y}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{u}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 5. \quad \text{Тогда} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 2x \ln y \frac{1}{u} + \frac{x^2}{y} \cdot 5.$$

Остается подставить в эту формулу выражения для x и y через u и v :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial v} &= 2 \frac{v}{u} \ln(u + 5v) \frac{1}{u} + \frac{v^2}{u^2} \cdot \frac{1}{u + 5v} \cdot 5 = \frac{2v}{u^2} \ln(u + 5v) + \frac{5v^2}{u^2(u + 5v)} = \\ &= \frac{v}{u^2} \left(2 \ln(u + 5v) + \frac{5v}{u + 5v} \right). \end{aligned}$$

Пример 4. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = \operatorname{arctg}(xy)$, $x = 5 \cos t$, $y = 5 \sin t$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + x^2 y^2} \cdot y = \frac{y}{1 + x^2 y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + x^2 y^2} \cdot x = \frac{x}{1 + x^2 y^2};$$

$$\frac{dx}{dt} = -5 \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 5 \cos t.$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{y}{1 + x^2 y^2} \cdot (-5 \sin t) + \frac{x}{1 + x^2 y^2} \cdot 5 \cos t = \frac{5 \sin t (-5 \sin t) + 5 \cos t \cdot 5 \cos t}{1 + x^2 y^2} = \\ &= \frac{25(\cos^2 t - \sin^2 t)}{1 + 25 \cos^2 t \cdot 25 \sin^2 t} = \frac{100 \cos 2t}{625 \sin^2 2t + 4}. \end{aligned}$$

Пример 5. $z = \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2})$. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Воспользуемся формулой $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)'_y$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{y + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot (y + \sqrt{x^2 + y^2})'_x = \\ &= \frac{1}{y + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2} (y + \sqrt{x^2 + y^2})}.\end{aligned}$$

Упростим полученное выражение:

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2} (y + \sqrt{x^2 + y^2})} &= \frac{x(y + \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2} (y + \sqrt{x^2 + y^2})(y + \sqrt{x^2 + y^2})} = \\ &= \frac{x(y + \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2} (y^2 - x^2 - y^2)} = -\frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{y}{x\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Теперь найдем частную производную этой функции по y :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)'_y = \left(-\frac{y}{x\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} \right)'_y = \\ &= -\frac{1}{x} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)'_y = -\frac{1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - y \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \\ &= -\frac{1}{x} \cdot \frac{x^2 + y^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

Пример 6. Найти производную функции $z = 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x$

и точке $M(2, -4)$ по направлению вектора MN , если $N(-1, -8)$.

Производная функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) по направлению l , заданному

вектором $\mathbf{a} = (x_a, y_a, z_a)$, имеет вид: $\frac{\partial z}{\partial l} = f'_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f'_y(x_0, y_0) \cos \beta$,

где $\cos \alpha = \frac{x_a}{|a|}$, $\cos \beta = \frac{y_a}{|a|}$ — направляющие косинусы направления l .

$$z'_x = 6x - 2y + 2, \quad z'_x(2, -4) = 12 + 8 + 2 = 22;$$

$$z'_y = -2x + 6y, \quad z'_y(2, -4) = -4 - 24 = -28; \quad \overline{MN} = (-1 - 2, -8 + 4) = (-3, -4),$$

$$|\overline{MN}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5, \quad \cos \alpha = -\frac{3}{5}, \quad \cos \beta = -\frac{4}{5}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 22 \cdot \left(-\frac{3}{5} \right) - 28 \cdot \left(-\frac{4}{5} \right) = \frac{-66 + 112}{5} = \frac{46}{5} = 9,2.$$

Пример 7. Найти градиент функции $u = \sqrt{4x^2 + y^2 - 4z^2}$ в точке $A(6, 10, -5)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{8x}{2\sqrt{4x^2 + y^2 - 4z^2}} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + y^2 - 4z^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(6, 10, -5) = \frac{24}{\sqrt{144 + 100 - 100}} = \frac{24}{12} = 2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{4x^2 + y^2 - 4z^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(6, 10, -5) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-4z}{\sqrt{4x^2 + y^2 - 4z^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(6, 10, -5) = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}.$$

$$\text{grad } u = \left(2, \frac{5}{6}, \frac{5}{3} \right).$$

Пример 8. Найти стационарную точку функции $z = 4x^2 - 4xy + 5y^2 - 16x + 24y$.

В стационарной точке $z'_x = z'_y = 0$. $z'_x = 8x - 4y - 16$, $z'_y = -4x + 10y + 24$.

Следовательно, координаты стационарной точки можно найти как решение системы

$$\begin{cases} 8x - 4y - 16 = 0 \\ -4x + 10y + 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ -2x + 5y + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}.$$

Координаты стационарной точки: (1, -2).

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Вариант 1

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - x - 2}$.

2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x-5} - 2}{x-9}$.

3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x \right)$.

4. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{\sin x \sin 6x}$.

5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x - 4}{x^2 + 3} \right)^{3x}$.

6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-2x}}{2 \arcsin x - \sin x}$.

7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 6 \sin x)}{\sin 5x}$.

8. Вычислить производную функции $y = x^7 \cdot e^{2x}$.

9. Вычислить производную функции $y = \operatorname{tg}^2 5x$.
10. Вычислить производную функции $y = x^2 \cdot \log_3 x$.
11. Вычислить производную функции $y = (x+1)^{\frac{1}{x}}$.
12. $x = \ln t, y = t^2; \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$
13. Определить промежутки возрастания функции $y = 1 - 4x - x^2$.
14. Найти экстремумы функции $y = 4x^3 + 9x^2 + 6x - 1$.
15. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости вверх и вниз графика функции $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$.
16. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$: $z = x \sin(x + y)$.
17. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$: $z = x^3 y + 2xy - y^2 + 3x$.
18. Найти градиент функции $u = z^2 \ln(x - y^2)$.
19. Найти производную функции $u = \sqrt{x + 2y + z^3}$ в точке $M(1;4;0)$ по направлению вектора $\mathbf{a} = \{2; -2; -1\}$.
20. Найти стационарные точки функции $z = x^2 + 2xy - y^2 + 3x + y + 4$.

Вариант 2

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - x - 3}$.
2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-5} - 1}{x-6}$.
3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 5} - x)$.
4. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{\sin x \cdot \operatorname{tg} 2x}$.
5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x}{x^2 + 3x + 1} \right)^{2x}$.
6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-x}}{2 \arcsin x + x}$.
7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 6x)}{\sin 2x}$.

8. Вычислить производную функции $y = \sqrt{x-1} \cdot e^{2x}$.
9. Вычислить производную функции $y = \frac{1}{2} \sin(x^2)$.
10. Вычислить производную функции $y = \sqrt{\ln^3(x+1)}$.
11. Вычислить производную функции $y = \left(\frac{x}{1+2x}\right)^x$.
12. $x = \cos t, y = \sin t; \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$
13. Определить промежутки возрастания и убывания функции $y = (x-2)^2$.
14. Найти экстремумы функции $y = x^2(1-x\sqrt{x})$.
15. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости вверх и вниз графика функции $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$.
16. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$: $z = x \cos(x+y)$.
17. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$: $z = xy^4 + 5xy - 3y^2 + y$.
18. Найти градиент функции $u = x^2 \ln(3x - z^2)$.
19. Найти производную функции $u = xy^2z$ в точке $M(-1;2;3)$ по направлению вектора $\mathbf{a} = \{3;-4;-12\}$.
20. Найти стационарные точки функции $z = 3x^2 - 5xy - y^2 + x + 3y + 1$.

Вариант 3

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4x - 5}$.
2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$.
3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 2} \right)$.
4. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x}{1 - \cos 4x}$.
5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x - 4}{x^2 + 2x + 1} \right)^x$.

6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{-x}}{2x - \sin x}$.
7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2\arctg x)}{\sin 3x}$.
8. Вычислить производную функции $y = -\frac{x}{x^2 + 1}$.
9. Вычислить производную функции $y = \operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 3x$.
10. Вычислить производную функции $y = e^{\sqrt{x^2 + 1}}$.
11. Вычислить производную функции $y = (x^2 + 1)^{\sin x}$.
12. $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t; \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$
13. Определить промежутки возрастания и убывания функции $y = (x + 4)^3$.
14. Найти экстремумы функции $y = \frac{x^2}{x - 2}$.
15. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости вверх и вниз графика функции $y = (x + 1)^4 + e^x$.
16. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$: $z = x \ln(x + y)$.
17. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$: $z = x^3 y^2 + x^2 y - 4xy^2 + 7y$.
18. Найти градиент функции $u = \sin(x^2 - y^2 + z^2)$.
19. Найти производную функции $u = \sqrt{x^3 + y + z^2}$ в точке $M(2; 0; -1)$ по направлению вектора $\mathbf{a} = \{2; -1; 2\}$.
20. Найти стационарные точки функции $z = 3x^2 - xy + 4y^2 - x - 2y + 5$.

Вариант 4

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 7x + 4}{x^2 + 4x - 5}$.
2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x + 5} - 3}{x - 4}$.
3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 3x + 2} \right)$.

4. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x \cdot \sin 3x}{1 - \cos 8x}$.
5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x + 1} \right)^{4x}$.
6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^x}{2x - \arcsin x}$.
7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2\operatorname{tg} x)}{3x}$.
8. Вычислить производную функции $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$.
9. Вычислить производную функции $y = x^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 3x$.
10. Вычислить производную функции $y = 10^{1 - \sin^4 3x}$.
11. Вычислить производную функции $y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}}$.
12. $x = \operatorname{arctg} t, y = \ln(1 + t^2); \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$
13. Определить промежутки возрастания и убывания функции $y = x^2(x - 3)$.
14. Найти экстремумы функции $y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.
15. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости вверх и вниз графика функции $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$.
16. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$: $z = y \sin(2x + y)$.
17. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$: $z = xy^5 + 2x^2y + 6x$.
18. Найти градиент функции $u = z \ln(x^3 - 3y^2)$.
19. Найти производную функции $u = x^3 + xyz$ в точке $M(1; -2; 0)$ по направлению вектора $\mathbf{a} = \{4; 0; -3\}$.
20. Найти стационарные точки функции $z = x^2 - 5xy + 3y^2 + x - 4y - 7$.

Вариант 5

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x - 12}{x^2 + x - 6}$.

2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x-7}$.
3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x - 3} - \sqrt{x^2 - 2x + 3})$.
4. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 3 \arcsin x}{3x - \operatorname{arctg} x}$.
5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 9}{x^2 - x - 2} \right)^{4x}$.
6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{3x}}{x + \sin x}$.
7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\ln(1 - 3 \sin 4x)}$.
8. Вычислить производную функции $y = \frac{2x^4}{3^x - x^2}$.
9. Вычислить производную функции $y = \sin^2 4x + \cos^3 3x$.
10. Вычислить производную функции $y = \frac{\ln x}{1 + x^2}$.
11. Вычислить производную функции $y = 2x^{\sqrt{x}}$.
12. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$; $\frac{d^2 y}{dx^2} = ?$
13. Определить промежутки возрастания и убывания функции $y = \frac{x}{x-2}$.
14. Найти экстремумы функции $y = x - 2 \ln x$.
15. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости вверх и вниз графика функции $y = x^2 \cdot \ln x$.
16. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$: $z = y \cos(3x - y)$.
17. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$: $z = 2x^3 y - 7xy^2 - y + x$.
18. Найти градиент функции $u = x^2 \ln(z - y^2)$.
19. Найти производную функции $u = \sqrt{x + y + 7z^3}$ в точке $M(1;1;1)$ по направлению вектора $\mathbf{a} = \{1; -2; 2\}$.
20. Найти стационарные точки функции $z = x^2 + xy - 4y^2 + 2x + 3y - 4$.

Вариант 6

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4x - 12}{x^2 - x - 6}$.
2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{\sqrt{x + 3} - 1}$.
3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 3x + 5})$.
4. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 4 \arcsin x}{\operatorname{arctg} x}$.
5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 3}{x^2 - x - 2} \right)^x$.
6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{2x}}{x + 2 \sin 2x}$.
7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1 - 3 \operatorname{tg} 2x)}$.
8. Вычислить производную функции $y = \sqrt[3]{\frac{1}{1 + x^2}}$.
9. Вычислить производную функции $y = x \cdot \arcsin^2 x$.
10. Вычислить производную функции $y = \sqrt{1 + \ln^2 x}$.
11. Вычислить производную функции $y = x^{\sin x}$.
12. $x = a(\sin t - t \cos t)$, $y = a(\cos t + t \sin t)$; $\frac{d^2 y}{dx^2} = ?$
13. Определить промежутки возрастания и убывания функции $y = \frac{1}{(x - 1)^3}$.
14. Найти экстремумы функции $y = \frac{x}{\ln x}$.
15. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости вверх и вниз графика функции $y = (x + 2)^3 + 2x + 2$.
16. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$: $z = y \ln(2x - y)$.
17. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$: $z = 4xy^4 + 3xy - xy^2 + 3y$.
18. Найти градиент функции $u = z \cos(x^2 + y^2)$.

19. Найти производную функции $u = xy + 2z$ в точке $M(-1;4;2)$ по направлению вектора $\mathbf{a} = \{0;-3;-4\}$.

20. Найти стационарные точки функции $z = 2x^2 + 3xy - 4y^2 + x + 3y - 2$.

Вариант 7

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 - 4x + 9}{3x^2 - x + 4}$.

2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x + 7} - 3}$.

3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - \sqrt{x^2 - x + 5})$.

4. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 3x}{x \arctg x}$.

5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x^2 - 2x} \right)^{3x}$.

6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^{2x}}{2 \sin 5x}$.

7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\ln(1 - 2x)}$.

8. Вычислить производную функции $y = \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$.

9. Вычислить производную функции $y = \frac{\operatorname{tg}^3 3x}{x^2}$.

10. Вычислить производную функции $y = e^{\sqrt{\ln x}}$.

11. Вычислить производную функции $y = \frac{(x + 1)^2 \cdot \sqrt[4]{x - 2}}{\sqrt[5]{(x - 3)^2}}$.

12. $x = \cos 2t, y = \sin^2 t; \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$

13. Определить промежутки возрастания и убывания функции $y = \frac{x}{x^2 - x - 16}$.

14. Найти экстремумы функции $y = \frac{3 - x^2}{x + 2}$.

15. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости вверх и вниз графика функции $y = \frac{x^3}{x^2 + 3}$.

16. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$: $z = x \operatorname{tg}(x + 3y)$.
17. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$: $z = 2x^3 y^2 - xy - x^2 + 5y$.
18. Найти градиент функции $u = y^2 \ln(z - y^2)$.
19. Найти производную функции $u = \sqrt{3x + 2y - z^3}$ в точке $M(-3; 4; 2)$ по направлению вектора $\mathbf{a} = \{2; 1; -2\}$.
20. Найти стационарные точки функции $z = 5x^2 + xy - 3y^2 - x - 2y + 2$.

Вариант 8

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - x - 10}{x^2 - 3x - 10}$.
2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x - 6}{\sqrt{x + 3} - 3}$.
3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 6x} - \sqrt{x^2 + 1})$.
4. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 4x}{\cos 3x - \cos 5x}$.
5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x}{x^2 - x - 4} \right)^{2x}$.
6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 5^x}{x + 2 \operatorname{tg} 3x}$.
7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\ln(1 - 3x)}$.
8. Вычислить производную функции $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{2} \cdot x}$.
9. Вычислить производную функции $y = \frac{x}{1 - \cos 2x}$.
10. Вычислить производную функции $y = x^2 \cdot e^{\frac{x^2}{3}}$.
11. Вычислить производную функции $y = x^{x^3}$.
12. $x = e^{-t}, y = e^t$; $\frac{d^2 y}{dx^2} = ?$
13. Определить промежутки возрастания и убывания функции $y = (x - 3)\sqrt{x}$.
14. Найти экстремумы функции $y = 2 \sin x + \cos 2x$ на интервале $(0; \pi)$.

15. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости вверх и вниз графика функции $y = 1 - \sqrt[3]{x-1}$.

16. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$: $z = y \sin(x - 4y)$.

17. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$: $z = 2xy^3 - 3xy - x^2 + y$.

18. Найти градиент функции $u = x^2 \cos(z^2 - y)$.

19. Найти производную функции $u = x^2 + xyz$ в точке $M(1; -2; 1)$ по направлению вектора $\mathbf{a} = \{6; -2; -3\}$.

20. Найти стационарные точки функции $z = 2x^2 + xy - 3y^2 - x + y + 5$.

Вариант 9

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 5x - 7}{6x^2 - x - 5}$.

2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x - 2} - 1}$.

3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 3} - \sqrt{x^2 + x - 1})$.

4. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 3x}{\cos x - \cos 4x}$.

5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 8}{x^2 - 2x - 1} \right)^{3x}$.

6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 5^x}{3x + \operatorname{tg} x}$.

7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\ln(1 - 3 \sin 5x)}$.

8. Вычислить производную функции $y = x^2 \cdot \sqrt{1 - 3x^2}$.

9. Вычислить производную функции $y = \cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x$.

10. Вычислить производную функции $y = \sin^3 x \cdot e^{-2x^2}$.

11. Вычислить производную функции $y = (\sin x)^{\cos x}$.

12. $x = \operatorname{arctg} t, y = \frac{1}{2} t^2; \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$

13. Определить промежутки возрастания и убывания функции $y = x + \sin x$.

14. Найти экстремумы функции $y = x - 2\sin^2 x$.
15. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости вверх и вниз графика функции $y = x^2 \cdot e^{-x}$.
16. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$: $z = x \cos(x - 5y)$.
17. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$: $z = 3x^3 y^4 + 2x^2 y - y^2 + 4x$.
18. Найти градиент функции $u = y^2 \ln(x - z^2)$.
19. Найти производную функции $u = \sqrt{x + 2y^2 + z}$ в точке $M(1; -4; 3)$ по направлению вектора $\mathbf{a} = \{3; -6; -2\}$.
20. Найти стационарные точки функции $z = x^2 - 3xy + 2y^2 - x + 4y + 1$.

Вариант 10

- Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 9x - 5}{x^2 - 3x - 10}$.
- Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{5 - x} - 1}$.
- Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x - 3} - \sqrt{x^2 + 2x - 1})$.
- Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\cos 3x - \cos 4x}$.
- Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 7}{x^2 - x - 6} \right)^{5x}$.
- Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 3^x}{\sin 4x - \operatorname{tg} 3x}$.
- Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\ln(1 + \arcsin 3x)}$.
- Вычислить производную функции $y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^4 - x^3}}$.
- Вычислить производную функции $y = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$.
- Вычислить производную функции $y = \log_3(x^2 - \sin x)$.
- Вычислить производную функции $y = (\sin x + 1)^{\frac{1}{x}}$.

12. $x = \ln t, y = \frac{1}{1-t}; \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$

13. Определить промежутки возрастания и убывания функции $y = x \cdot \ln x$.

14. Найти экстремумы функции $y = x^2 \cdot e^{-x}$.

15. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости вверх и вниз графика функции $y = \ln(1 + x^2)$.

16. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$: $z = x \ln(x + 3y^2)$.

17. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$: $z = x^3 y^2 + xy - x^2 + y$.

18. Найти градиент функции $u = z^2 \sin(x^3 + y)$.

19. Найти производную функции $u = xyz^3$ в точке $M(2; -1; 1)$ по направлению вектора $\mathbf{a} = \{12; -3; -4\}$.

20. Найти стационарные точки функции $z = x^2 + 3xy - 2y^2 + x + 5y + 7$.

Вариант 11

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{3x^2 - 10x + 3}$.

2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{5 - x} - 2}$.

3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x - 4} - \sqrt{x^2 + 2x + 8})$.

4. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 6x}{\cos x - \cos 4x}$.

5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 5}{x^2 - x - 2} \right)^{2x}$.

6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{x}$.

7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\ln(1 + \sin 3x)}$.

8. Вычислить производную функции $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}$.

9. Вычислить производную функции $y = \operatorname{tg}^2 \frac{x+1}{2}$.

10. Вычислить производную функции $y = e^{\frac{1}{\ln x}}$.
11. Вычислить производную функции $y = \frac{(x+2)^2 \cdot \sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$.
12. $x = e^t \cdot \cos t$, $y = e^t \cdot \sin t$; $\frac{d^2 y}{dx^2} = ?$
13. Определить промежутки возрастания и убывания функции $y = \arcsin \frac{1}{1+x}$.
14. Найти экстремумы функции $y = x \ln x$.
15. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости вверх и вниз графика функции $y = \frac{1}{x} \cdot \ln \frac{x}{2}$.
16. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$: $z = y \sin(4x^3 + y)$.
17. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$: $z = xy^3 + 6xy - x^2 + 5y$.
18. Найти градиент функции $u = y^2 \ln(x^2 - 5y)$.
19. Найти производную функции $u = \sqrt{x^2 - 4y + z^3}$ в точке $M(-2; -1; 1)$ по направлению вектора $\mathbf{a} = \{2; -1; -2\}$.
20. Найти стационарные точки функции $z = 3x^2 - 2xy - y^2 + x + 4y - 7$.

Вариант 12

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 - 3x - 4}$.
2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{3-x}-1}$.
3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x - 3} - x)$.
4. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{\cos 2x - \cos 3x}$.
5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5x + 2}{x^2 - x} \right)^x$.
6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+2} - e^2}{3x}$.

7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\ln(1+3x)}$.
8. Вычислить производную функции $y = \frac{2}{(x^2 - x + 1)^2}$.
9. Вычислить производную функции $y = \sin(\sin x)$.
10. Вычислить производную функции $y = 10^{x \operatorname{tg} x}$.
11. Вычислить производную функции $y = x^{\ln x}$.
12. $x = \ln(1+t^2)$, $y = t^2$; $\frac{d^2 y}{dx^2} = ?$
13. Определить промежутки возрастания и убывания функции $y = 2e^{x^2-4x}$.
14. Найти экстремумы функции $y = (3x+6)e^{\frac{x}{3}}$.
15. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости вверх и вниз графика функции $y = 1 - \sqrt[5]{(x-1)^2}$.
16. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$: $z = x \cos(x^2 - 3y)$.
17. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$: $z = x^3 y^2 + 2x^2 y - y^2 + x$.
18. Найти градиент функции $u = z^2 \sin(x - 3y^2)$.
19. Найти производную функции $u = xyz$ в точке $M(1;4;-1)$ по направлению вектора $\mathbf{a} = \{2;-2;-1\}$.
20. Найти стационарные точки функции $z = x^2 + 5xy - 2y^2 - x - y + 3$.

Вариант 13

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 + 9x - 5}{x^2 + 3x - 10}$.
2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 6}{\sqrt{7-x} - 2}$.
3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 2x - 1})$.
4. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos 3x - \cos x}$.
5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1} \right)^{4x}$.

6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{e^{x+3} - e^3}$.
7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\ln(1-5x)}$.
8. Вычислить производную функции $y = (1 - 2\sqrt{x})^4$.
9. Вычислить производную функции $y = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$.
10. Вычислить производную функции $y = \frac{2 \cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$.
11. Вычислить производную функции $y = (\ln x)^x$.
12. $x = \frac{1}{\cos t}$, $y = \operatorname{tg} t$; $\frac{d^2 y}{dx^2} = ?$
13. Определить промежутки возрастания и убывания функции $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$.
14. Найти экстремумы функции $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$.
15. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости вверх и вниз графика функции $y = e^{\operatorname{arctg} x}$.
16. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$: $z = x \ln(x - 4y^3)$.
17. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$: $z = x^4 y + 2xy^3 - 5x^2 + 3y$.
18. Найти градиент функции $u = x^2 \cos(3z - y^2)$.
19. Найти производную функции $u = \sqrt{x - 2y^2 + z^3}$ в точке $M(0; -1; 3)$ по направлению вектора $\mathbf{a} = \{3; -2; -6\}$.
20. Найти стационарные точки функции $z = 2x^2 - 2xy - 3y^2 + x + 3y - 2$.

Вариант 14

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 9x - 11}{3x^2 - x - 2}$.
2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{\sqrt{8 - 2x} - 2}$.
3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x + 5})$.
4. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{\cos 3x - \cos 4x}$.

5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 7}{x^2 - x - 6} \right)^{3x}$.
6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 2^x}{\sin 5x - x}$.
7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\ln(1 + \arcsin 4x)}$.
8. Вычислить производную функции $y = \frac{1 - \sqrt[3]{2x}}{1 + \sqrt[3]{2x}}$.
9. Вычислить производную функции $y = \operatorname{ctg} \sqrt[3]{1 + x^2}$.
10. Вычислить производную функции $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$.
11. Вычислить производную функции $y = x^3 \cdot e^{x^2} \cdot \sin 2x$.
12. $x = e^{-t}, y = t^2; \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$
13. Определить промежутки возрастания и убывания функции $y = \frac{e^x}{x}$.
14. Найти экстремумы функции $y = \frac{2x + 3}{2x - 5}$.
15. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости вверх и вниз графика функции $y = x^4(12 \ln x - 7)$.
16. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$: $z = y^2 \sin(x - y)$.
17. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$: $z = 2x^3 y - xy - y^2 - x$.
18. Найти градиент функции $u = z^2 \ln(x^2 - 7y)$.
19. Найти производную функции $u = xy + xz^2$ в точке $M(1;4;-2)$ по направлению вектора $\mathbf{a} = \{1;2;-2\}$.
20. Найти стационарные точки функции $z = x^2 + xy - 4y^2 + x - y + 2$.

Вариант 15

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 7x + 2}{x^2 - 4}$.
2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x - 10}{\sqrt{6 - x} - 1}$.

3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3} - \sqrt{x^2 + 2x - 8})$.

4. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{\cos 3x - \cos 4x}$.

5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5x + 7}{x^2 + 2x - 2} \right)^x$.

6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\operatorname{tg} 3x}$.

7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\ln(1 + 3x^2)}$.

8. Вычислить производную функции $y = \frac{(x+4)^2}{x+3}$.

9. Вычислить производную функции $y = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)}$.

10. Вычислить производную функции $y = \operatorname{tg} \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$.

11. Вычислить производную функции $y = x \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2 + 1}}$.

12. $x = \ln t, y = t^2 - 1; \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$

13. Определить промежутки возрастания и убывания функции $y = \frac{x}{\ln x}$.

14. Найти экстремумы функции $y = \frac{x}{1 + x^2}$.

15. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости вверх и вниз графика функции $y = x^2 \cdot e^x$.

16. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$: $z = y^3 \cos(3x^2 + y)$.

17. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$: $z = x^2 y^4 + 4xy - y^2 + 5x$.

18. Найти градиент функции $u = y^2 \ln(4x - z^2)$.

19. Найти производную функции $u = x^2 y z^3$ в точке $M(1; -2; 1)$ по направлению вектора $\mathbf{a} = \{2; -1; 2\}$.

20. Найти стационарные точки функции $z = 3x^2 - xy + 2y^2 + x - 4y + 1$.

Вариант 16

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2 - 11x - 6}{x^2 - 3x - 18}$.
2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x - 12}{\sqrt{8 - x} - 2}$.
3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x + 13} - x)$.
4. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 2x}{\cos x - \cos 5x}$.
5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3} \right)^{2x}$.
6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{\sin 4x - 3x}$.
7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\ln(1 - 5x)}$.
8. Вычислить производную функции $y = \frac{x}{\sqrt[3]{2x - 1}}$.
9. Вычислить производную функции $y = (1 + \sin 2x)^4$.
10. Вычислить производную функции $y = \ln \operatorname{tg} x$.
11. Вычислить производную функции $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.
12. $x = t \cos t, y = t \sin t; \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$
13. Определить промежутки возрастания и убывания функции $y = \ln(x^2 + 1)$.
14. Найти экстремумы функции $y = 2x^3 - 3x^2$.
15. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости вверх и вниз графика функции $y = x - \ln x$.
16. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$: $z = y^2 \operatorname{tg}(x^3 + y)$.
17. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$: $z = 3x^3 y - xy + 2y^2 + x$.
18. Найти градиент функции $u = z^2 \sin(x^2 - 3y)$.

19. Найти производную функции $u = \sqrt{2x + y + z^3}$ в точке $M(4;1;0)$ по направлению вектора $\mathbf{a} = \{-2;2;1\}$.

20. Найти стационарные точки функции $z = 4x^2 + xy - 3y^2 + x + y - 5$.

Вариант 17

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 - 9x - 2}{x^2 + 4x - 12}$.

2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{16 - 3x} - 2}$.

3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 4x - 6})$.

4. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arctg 2x}{\sin x \cdot \sin 4x}$.

5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5x + 1}{x^2 + 3x - 2} \right)^{2x}$.

6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 3^x}{x - \operatorname{tg} 5x}$.

7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{\ln(1 - \arcsin 2x)}$.

8. Вычислить производную функции $y = \sqrt[4]{3 + 2x^2}$.

9. Вычислить производную функции $y = \cos^3(3x + 1)$.

10. Вычислить производную функции $y = e^{-x^2} \cdot \ln 2x$.

11. Вычислить производную функции $y = (\cos x)^{\sin x}$.

12. $x = 4t^2, y = 5t^3; \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$

13. Определить промежутки возрастания и убывания функции $y = x + x\sqrt{x}$.

14. Найти экстремумы функции $y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$.

15. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости вверх и вниз графика функции $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$.

16. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$: $z = y \ln(3x + 2y)$.

17. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$: $z = xy^3 + 2xy - x^2 + 4x$.

18. Найти градиент функции $u = z^2 \cos(x - 2y^2)$.

19. Найти производную функции $u = x^2 yz$ в точке $M(2;4;-1)$ по направлению вектора $\mathbf{a} = \{2;-3;-6\}$.

20. Найти стационарные точки функции $z = x^2 + 5xy - 2y^2 - x + y + 4$.

Вариант 18

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{x^2 - 2x - 15}$.

2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x - 10}{\sqrt{5 - 2x} - 1}$.

3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 6x - 1})$.

4. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{\cos x - \cos 4x}$.

5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 5}{x^2 - 2x - 2} \right)^x$.

6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{\sin 6x}$.

7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\ln(1 + \sin 7x)}$.

8. Вычислить производную функции $y = \sqrt{\frac{x+2}{1-2x}}$.

9. Вычислить производную функции $y = \sin^2(1 - 2x^3)$.

10. Вычислить производную функции $y = \arctg \frac{x+1}{x-1}$.

11. Вычислить производную функции $y = (\arctg x)^x$.

12. $x = 1 - t^2, y = t - t^3$; $\frac{d^2 y}{dx^2} = ?$

13. Определить промежутки возрастания и убывания функции $y = x \cdot e^{3x}$.

14. Найти экстремумы функции $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$.

15. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости вверх и вниз графика функции $y = e^{-x^2}$.

16. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$: $z = x \sin(x^2 + y^2)$.

17. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$: $z = x^3 y + xy - 4y^2 + 5x$.

18. Найти градиент функции $u = z^2 \ln(x + y^3)$.

19. Найти производную функции $u = \sqrt{x^2 + 2y - z^3}$ в точке $M(-3; 4; 1)$ по направлению вектора $\mathbf{a} = \{0; -4; -3\}$.

20. Найти стационарные точки функции $z = x^2 - 4xy - 3y^2 + x - y + 2$.

Вариант 19

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 8x - 3}{x^2 - 5x + 6}$.

2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{17 - 2x} - 3}{x - 4}$.

3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 4} - \sqrt{x^2 + 2x + 5})$.

4. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}^2 5x}{\cos 3x - \cos 2x}$.

5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x + 5}{x^2 - 3x - 1} \right)^{4x}$.

6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 6^x}{x}$.

7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1 - x)}$.

8. Вычислить производную функции $y = \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{1 - 9x}}$.

9. Вычислить производную функции $y = 2x \cos 4x - \sin 4x$.

10. Вычислить производную функции $y = \frac{2 \sin^2 x}{\cos 2x}$.

11. Вычислить производную функции $y = (\operatorname{tg} x + 1)^x$.

12. $x = \frac{t+1}{t}, y = \frac{t-1}{t}; \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$

13. Определить промежутки возрастания и убывания функции $y = (2 - x)(x + 1)^2$.

14. Найти экстремумы функции $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 8}$.
15. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости вверх и вниз графика функции $y = \sqrt{x^3}$.
16. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$: $z = x \cos(x^2 - y^2)$.
17. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$: $z = 4x^3 y - xy + 3y^2 + 2x$.
18. Найти градиент функции $u = x^2 \ln(5z - y^2)$.
19. Найти производную функции $u = xy^2 z^2$ в точке $M(1; -1; 2)$ по направлению вектора $\mathbf{a} = \{2; 1; -2\}$.
20. Найти стационарные точки функции $z = 2x^2 + xy - 5y^2 + x + 3y + 3$.

Вариант 20

- Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x^2 + 8x - 3}{x^2 + 5x + 6}$.
- Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{19 - 5x} - 3}{x - 2}$.
- Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x)$.
- Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos 7x - \cos 2x}$.
- Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x + 5}{x^2 + 2x - 1} \right)^{3x}$.
- Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin 5x}$.
- Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\ln(1 - \operatorname{tg} 3x)}$.
- Вычислить производную функции $y = \frac{3\sqrt{1 - 9x^2}}{2\sqrt{x}}$.
- Вычислить производную функции $y = (2x + 1)\sqrt{1 - \sin 2x}$.
- Вычислить производную функции $y = \sin 2x \cdot e^{\cos x}$.
- Вычислить производную функции $y = (\ln x + 1)^{\sin x}$.
- $x = t^2 + 2t, y = t^3 + t; \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$

13. Определить промежутки возрастания и убывания функции $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 2$.
14. Найти экстремумы функции $y = -x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 2}$.
15. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости вверх и вниз графика функции $y = (1 + x^2)e^x$.
16. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$: $z = x \ln(x^2 + 3y^2)$.
17. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$: $z = 5x^2y + xy - 2y^3 + x$.
18. Найти градиент функции $u = y^2 \cos(x + 2z^2)$.
19. Найти производную функции $u = \sqrt{x + y - z^3}$ в точке $M(5;4;2)$ по направлению вектора $\mathbf{a} = \{3; -2; 6\}$.
20. Найти стационарные точки функции $z = 2x^2 + xy - 4y^2 - 3x + 2y + 1$.