Федеральное агентство по образованию

**Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования**

«МАТИ» – Российский государственный
технологический университет им. К.Э. Циолковского

Кафедра «Высшая математика»

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Методические указания к лабораторной работе
по курсу "Информатика"

Составители: **Сидоров Б. Н.**
Никулин А. М.

Москва 2005

Данное руководство предназначено для студентов, изучающих предмет «Численные методы» и выполняющих лабораторные работы по курсу «Информатика». В методических указаниях рассмотрен ряд методов вычисления определенного интеграла и приведены примеры решения задач на языке программирования и в среде Mathcad.

I. Методы приближенного вычисления определенного интеграла.

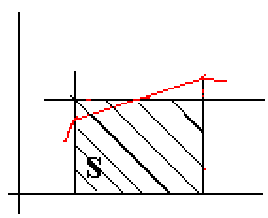
Определенный интеграл $I = \int_a^b f(x)dx$ представляет собой площадь, ограниченную кривой f(x), осью OX, и прямыми x=a, x=b.

Для его приближенного вычисления используется следующий метод:

1. Отрезок интегрирования |a b| необходимо разбить на N частей, где $h = \frac{|b-a|}{N}$ – длина интервала разбиения (шаг разбиения).
2. Заменить на каждом интервале исходную функцию на полином(многочлен), интеграл от которого легко вычисляется $f(x) \approx p(x)$ (интерполирующая функция)
3. Вычислить интеграл на каждом интервале от интерполирующей функции
$$Si := \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)dx$$
4. Исходный интеграл равен сумме интегралов, вычисленных на каждом интервале
$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_i^n Si$$

В зависимости от вида приближаемой (интерполирующей) функции *p(x)* получаются следующие методы:

1. Метод прямоугольников p(x)=const , прямую проводим через середины интервалов. Значение интеграла на интервале тогда будет равно: $Si = f(x_{i+1/2}) \cdot h$



Ошибку метода можно оценить по формуле

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24 \cdot n^2} \cdot \max_{x \in a,b} |f_x''|$$

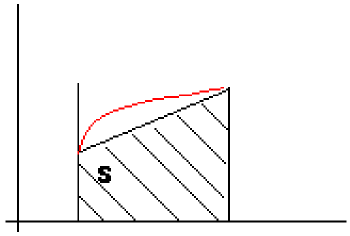
где |b-a| длина отрезка интегрирования

n- количество интервалов разбиения.

$|f_x''|$ - модуль производной второго порядка от подынтегральной функции

2. Метод трапеции p(x) =ax+b , прямую проводим через концы интервалов

Значение интеграла на интервале тогда будет равно: $S_i = \frac{h}{2} \cdot (f(x_i) + f(x_{i+1}))$



Ошибку метода можно оценить по формуле

$R_n = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \max\limits_{x \in a,b} \left| f_x^{''} \right|$ -(в два раза больше, чем у прямоугольников).

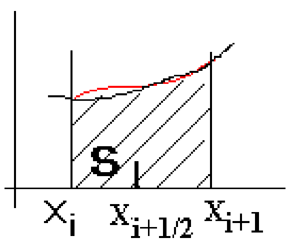
где |b-a| длина отрезка интегрирования

n- количество интервалов разбиения.

$\left| f_x^{''} \right|$ - модуль производной второго порядка от подынтегральной функции

3. Метод парабол (Симпсона) $P(x) = ax^2 + bx + c$ т. к. парабола определяется тремя точками, то кроме граничных точек интервала x_i и x_{i+1} надо взять ещё одну – посередине $x_{i+1/2}$

Значение интеграла на интервале тогда будет равно: $S_i = \frac{h}{6}(f(x_i) + 4f(x_{i+1/2}) + f(x_{i+1})$



Ошибку метода можно оценить по формуле

$R(n) = \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \max\limits_{x \in (a,b)} f^{IV}(x)$

где |b-a| длина отрезка интегрирования

n- количество интервалов разбиения.

$\left| f_x^{IV} \right|$ - модуль производной четвертого порядка от подынтегральной функции

Усовершенствованные методы.

Если вместо параболы использовать многочлены более высоких степеней, то получаются методы Ньютона – Кортеса.

Если местоположение и длина интервалов определяется путем анализа, сначала определяется количество интервалов, а затем в соответствии с требованием достижения наибольшей точности точки внутри интервалов через которые проходит приближающая функция, то получаются методы Гаусса. Стоит отметить, что наиболее оптимальным методом по соотношения простоты / точность является все же метод парабол(Симпсона).

Оценка погрешности по правилу Рунге.

При программировании вычисление определенного интеграла заканчивают по достижении заданной точности – EPSI.
Для оценки точности в этом случаи используют метод двойного пересчета, который заключается в следующем:
1. Вычисляется интеграл с разбиением на n интервалов
2. Увеличивают количество интервалов в два раза и получают новое приближение
Чтобы определить как новое вычисленное значение отличается от истинного значения применяют правило Рунге:

Для методов трапеции и прямоугольников $\left|I_0 - I_{2n}\right| \approx \frac{1}{3}\left|I_{2n} - I_n\right|$

Для метода парабол $\left|I_0 - I_{2n}\right| \approx \frac{1}{15}\left|I_{2n} - I_n\right|$

2. Решение задачи в Mathcade

Задание

Для интеграла $I = \int_1^3 x^3 \sin(x) dx$,

I. Вычислить значение интеграла символьным методом.

II . Метод прямоугольников
1. Вычислить значение определенного интеграла приближенным методом прямоугольников с числом разбиений равным двум.
2. Вычислить значение определенного интеграла методом прямоугольников с числом разбиений равным N .
3. Определить число интервалов разбиение для заданной точности (точность равна E=0.01), и найти значение интеграла для этого N.
4. Оценить погрешность для вычисленного значения интеграла с числом разбиений равным найденному (в пункте 3) N по формуле Рунге
5. Построить график зависимости ошибки вычисления от N, и график приближенного значения интеграла от N.

III. Метод парабол
1. Вычислить значение определенного интеграла приближенным методом парабол с одним интервалом разбиения.
2. Вычислить значение определенного интеграла методом парабол с числом разбиений равным N .
3. Определить число интервалов разбиение для заданной точности (точность равна E=0.01), и найти значение интеграла для этого N.
4. Оценить погрешность для вычисленного значения интеграла с числом разбиений равным найденному (в пункте 3) N по формуле Рунге
5. Построить график зависимости ошибки вычисления от N, и график приближенного значения интеграла от N.

Пример решения задачи в MATHCAD приведен в приложении

3.Решение задач в Паскале

I Программа вычисления интегралов с числом интервалов разбиения равному n
Для примера будем использовать метод парабол. В программе подынтегральная функция задается в виде процедуры функции f(x). При решении задачи используются так же следующие переменные и константы:
a и b – границы интервала интегрирования, описываются как константы
n – количество интервалов разбиения, вводится с клавиатуры
h – длина одного интервала, вычисляется по формуле h : = |b-a| /n
x – начало интервала до цикла x присваивается начальное значение x:=a, а во время цикла переход к следующему интервалу осуществляется в цикле прибавлением к x длины интервала h: x:=x+h
Si – приближенное значение интеграла на интервале
S – приближенное значение интеграла на всем отрезке интегрирования
Само решение задачи заключается в вычислении суммы n слагаемых – каждый из которых является значением интеграла на интервале (переменная Si). Значение интеграла на интервале вычисляется по формуле метода парабол:
Si:=(h/6)(f(x)+4f(x+h/2)+f(x+h))
Сумма вычисляется в цикле FOR, тогда алгоритм будет выглядеть следующим образом

```
{Вычислить длину интервала разбиения}
  H=|b-a|/n
{Задать первоначальные значения переменных
 X – переменная, определяющая начало интервала
 S – накапливаемая сумма}
           X:=a;       S:=0;
FOR I:= 1 TO N DO
  BEGIN
     Вычисление Si – приближенного значения интеграла на интервале i
     S:=S+Si
     {Переход к следующему интервалу}   X:=X+H
 END.
```

S – значение интеграла

Текст программы:

```
const a=1;b=3;
var S,Si:real;
    x,h:real;
    n,i: integer;


 Function  F(x:real):real;
  begin
    F:=x*x*x*sin(x);
  end;

  begin
   write('n='); readln(n);
   h:=abs(b-a)/n;
   S:=0; x:=a;
   for i:=1 to n do
    begin
     Si:=(f(x)+4*f(x+h/2)+f(x+h))*h/6;
     S:=S+Si;
     x:=x+h;
    end;
    writeln( 'S= ',s:7:4);
    readln;
    end.
```

II Программа вычисления интегралов с заданной точностью.
Оценка точности будет производится по формуле Рунге:

Алгоритм заключается в сравнении значений интеграла вычисленных с одним и двумя интервалами разбиения, затем с двумя и четырьмя интервалами, потом четырьмя и восьмью и т.д. пока разница между этими значениями не станет меньше заданной точности. Для записи этого алгоритма используем цикл WHILE.

```
N:=1
WHILE( | I(N)-I(2N)| > E DO
     N:=2N (Увеличить N в 2 раза)
```

где   I(N) – значение интеграла, вычисленное с N интервалами разбиения

Само же вычисление интеграла с n интервалами разбиения оформим в виде процедуры функций тело которой повторяет программу из пункта 1 с той лишь разницей, что n не вводится с клавиатуры, а передается в виде параметра.

Текст программы:

```
const a=1;b=3;
          e=0.0001;
    var S,Si:real;
        x,h:real;
        n,i: integer;


     Function  F(x:real):real;
      begin
        F:=x*x*x*sin(x);
      end;

      Function Simpson(n:integer):real ;
       var S,Si:real;

        x,h:real;
        i: integer;
      begin
       h:=abs(b-a)/n;
       S:=0; x:=a;
       for i:=1 to n do
        begin
         Si:=(f(x)+4*f(x+h/2)+f(x+h))*h/6;
         S:=S+Si;
         x:=x+h;
        end;
       Simpson:=S;
      end;

      Begin
        n:=1;
        While (abs(Simpson(2*n)-Simpson(n))>E) do
          n:=2*n;
       writeln( 'S= ',Simpson(n):7:4);
        readln;
        end.
```

4.Задание к лабораторной работе

I. *В Mathcade*

1. Вычислить значение определенного интеграла символьным методом.
2. Вычислить значение определенного интеграла приближенными методами прямоугольников или трапеций с двумя интервалами разбиений и методом парабол с одним интервалом разбиения.
3. Вычислить значение определенного интеграла приближенными методами прямоугольников или трапеций и методом парабол с N интервалами разбиения.
4. Определить число интервалов разбиение для заданной точности, и найти значение интеграла для этого N.
5. Оценить погрешность для вычисленного N по формуле Рунге
6. Построить график зависимости ошибки вычисление от N, и график приближенного значения интеграла от N.

II. В Паскале

1 Написать программу на Паскале для вычисления значения определенного интеграла приближенными методами прямоугольников или трапеций и методом парабол с N интервалами разбиения.
2 Написать программу на Паскале для вычисления значения определенного интеграла приближенными методами прямоугольников или трапеций и методом парабол с заданной точностью с оценкой погрешностью по формуле Рунге

Варианты заданий

В вариантах заданий указана подынтегральная функция f(x) , пределы интегрирования a и b. Нечетные номера вычисляют интеграл методами прямоугольников и парабол, а четные – трапеций и парабол. Точность вычислений 0.001

1. $f(x) := \sin(x)\cdot(x^2 - 5\cdot x + 3) \qquad a = 1 \quad b = 3$
2. $f(x) := \cos(x)\cdot(x^2 - 3\cdot x + 1) \qquad a = 0 \quad b = 2$
3. $f(x) := \sin(x)\cdot(x^2 + 2\cdot x - 1) \qquad a = 1 \quad b = 2$
4. $f(x) := \sin(x)\cdot(x^2 - x - 1) \qquad a = 2 \quad b = 4$
5. $f(x) := \cos(x)\cdot(x^2 + 2\cdot x - 4) \qquad a = 0 \quad b = 4$
6. $f(x) := \sin(x)\cdot(x^2 + 2\cdot x + 1) \qquad a = 1 \quad b = 4$
7. $f(x) := \cos(x)\cdot(2\cdot x^2 - x + 4) \qquad a = 0 \quad b = 1$
8. $f(x) := \sin(x)\cdot(x^2 - 0.5\cdot x + 1) \qquad a = 0 \quad b = p/2$
9. $f(x) := \cos(x)\cdot(x^2 + 1.5\cdot x - 2) \qquad a = 0 \quad b = p/3$
10. $f(x) := \sin(x)\cdot(x^2 + x + 1) \qquad a = 0 \quad b = 2\cdot p/3$

Задание к лабораторной работе
Варианты заданий (продолжение)

11. $f(x) := \cos(x) \cdot (x^2 - x - 1) \qquad a = p/6 \quad b = p/2$

12. $f(x) := \sin(x) \cdot (0.5 \cdot x^2 + x - 1) \qquad a = 0 \quad b = 2 \cdot p/3$

13. $f(x) := \cos(x) \cdot (2 \cdot x^2 + x + 2) \qquad a = 0 \quad b = p/2$

14. $f(x) := \sin(x) \cdot (x^2 + 2 \cdot x + 3) \qquad a = 0 \quad b = p$

15. $f(x) := \cos(x) \cdot (x^2 - 2 \cdot x + 3) \qquad a = -1 \quad b = 1$

16. $f(x) := \sin(x) \cdot (x^2 + 6 \cdot x - 5) \qquad a = \frac{p}{4} \quad b = 3 \cdot p/4$

17. $f(x) := \cos(x) \cdot (x^2 - x + 2) \qquad a = -1 \quad b = 3$

18. $f(x) := \sin(x) \cdot (0.5 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 2) \qquad a = 0 \quad b = 4$

19. $f(x) := \cos(x) \cdot (-x^2 + 4 \cdot x + 2) \qquad a = -p/2 \quad b = 0$

20. $f(x) := \sin(x) \cdot (-x^2 + 5 \cdot x + 3) \qquad a = 0 \quad b = p/2$

ЛИТЕРАТУРА

1. Mathcad 6.0 plus. Руководство пользователя. М.: Филинъ,1998.
2. Ракитин В.И., Первушин В.Е. Практическое руководство по методам вычислений. М.: Высшая школа, 1998
3. Попов В. Б. Turbo Pascal 7.0 для школьников.
М.: Финансы и статистика, 1996.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Приложение

Пример выполнения задания

Пределы интегрирования

$a := 1$

$b := 3$

Подыттегральная функция

$f(x) := x^3 \cdot \sin(x)$

I. Вычисление определенного интеграла символьно

Вычисление первообразной, используя символьные вычисления

$$F(x) := \int f(x)\,dx \rightarrow -x^3 \cdot \cos(x) + 3 \cdot x^2 \cdot \sin(x) - 6 \cdot \sin(x) + 6 \cdot x \cdot \cos(x)$$

Проверка

$$\frac{d}{dx}F(x) \rightarrow x^3 \cdot \sin(x)$$

Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница

$S := F(b) - F(a)$

$S = 11.696$

Вычисление определенного интеграла, используя символьный оператор

$$S := \int_a^b f(x)\,dx \rightarrow -9 \cdot \cos(3) + 21 \cdot \sin(3) - 5 \cdot \cos(1) + 3 \cdot \sin(1)$$

$S = 11.696$

II. Метод прямоугольников

1. Вычислить значение определенного интеграла методом прямоугольников с числом интервалов разбиения равным двум

$$S1 := \frac{|b-a|}{2} \cdot f\left(a + \frac{|b-a|}{4}\right) + \frac{|b-a|}{2} \cdot f\left(a + \frac{3|b-a|}{4}\right)$$

$S1 = 12.718$

2. Вычислить значение определенного интеграла методом прямоугольников с числом интервалов разбиения равным N

$$Spr(n) := \sum_{i=1}^{n} f\left[a + \left(i - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{|b-a|}{n}\right] \cdot \frac{|b-a|}{n}$$

Для проверки работы формулы используем значение n=2 (должно совпасть с вычисленным значением в пункте 1) и n=10 (должно стремиться к точному значению)

$Spr(2) = 12.718$

$Spr(10) = 11.74$

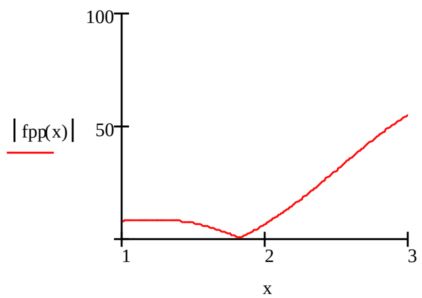
3. Определить число интервалов разбиения для заданной точности (E=0.01), и найти значение определенного интеграла методом прямоугольников с числом интервалов разбиения равному этому N

Найдем символьно вторую производную

$$fpp(x) := \frac{d^2}{dx^2}f(x) \rightarrow 6 \cdot x \cdot \sin(x) + 6 \cdot x^2 \cdot \cos(x) - x^3 \cdot \sin(x)$$

Построим график модуля второй производной на отрезке интегрирования

$x := a, a + 0.01 .. b$



По графику видно, что свое максимальное значение модуль второй производной принимает в граничной точке отрезка b

$max := |fpp(b)|$

$max = 54.73$

Запишем формулу ошибки

$$R(n) := \frac{(b - a)^3}{24 \cdot n^2} \cdot max$$

Применим эту формулу для n=10 и сравним полученную оценку погрешности с точным значением погрешности

Оценка погрешности по формуле для n=10

$R(10) = 0.182$

Точным значение погрешности

$|S - Spr(10)| = 0.043$

Видно, что формула дает оценку погрешности с большим запасом

Д ля сравнения оценим погрешность по правилу Рунге для n=10

$$\frac{|Spr(10) - Spr(5)|}{3} = 0.043$$

Видно, что применение правила Рунге дает более точную оценку погрешности, чем применение формулы.

Для вычисление количество точек, необходимых для достижения данной точности E=0.01, зададим произвольно начальное приближение n=10 и решим уравнение Ошибка(n)-точность=0, используя встроенную в Mathcad функцию, решающую уравнения root

Точность

$Epsi := 0.01$

Начальное приближение

$n := 10$

Решение уравнения

$$n := root\left[\left[\frac{(b - a)^3}{24 \cdot n^2} \cdot max - Epsi\right], n\right]$$

Результат

$n := floor(n)$

$n = 41$

(floor - функция округления)

Значение определенного интеграла, вычисленное методом прямоугольников с числом интервалов разбиения равному найденному N, и ошибка вычисления

$Spr(n) = 11.699$

$|Spr(n) - S| = 2.576 \times 10^{-3}$

4. Оценить погрешность для вычисленного значения интеграла с числом интервалов разбиения равному найденному N по формуле Рунге

$$\frac{\left|\mathrm{Spr}(n) - \mathrm{Spr}\left(\mathrm{floor}\left(\frac{n}{2}\right)\right)\right|}{3} = 2.748\times 10^{-3}$$

Точное значение погрешности при этом равно

$$\left|\mathrm{Spr}(n) - S\right| = 2.576\times 10^{-3}$$

5. Построить график зависимости ошибки вычисления от N и график приближенного значения интеграла от N

Зададим интервал изменения N от 10 до 100 с шагом 10

$n := 10, 20 .. 100$

18

График зависимости приближенного значения интеграла от N (на график нанесено также и точное значение интеграла)

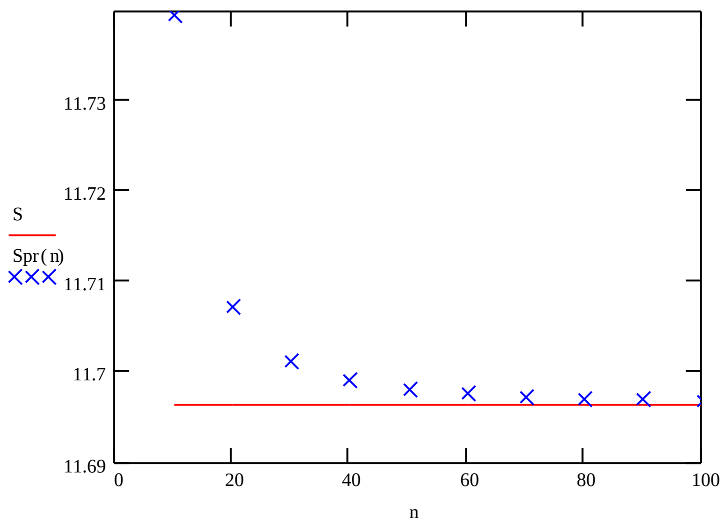
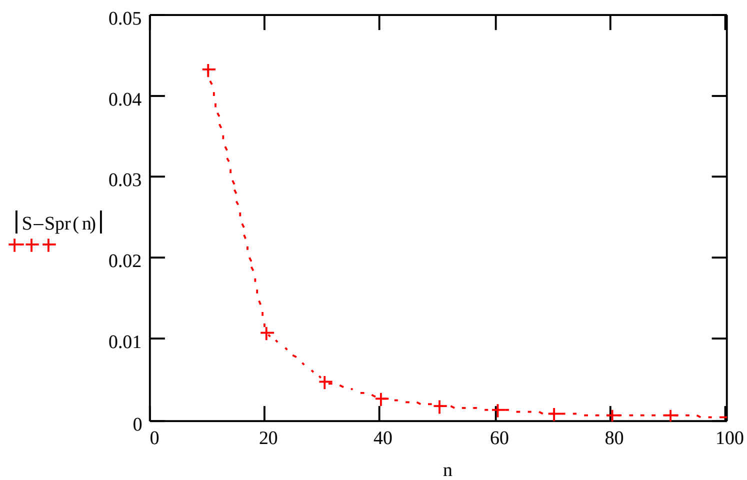


График зависимости ошибки вычисления от N



III. Метод парабол (Симпсона)

1. Вычислить значение определенного интеграла методом парабол с одним интервалом разбиения

$$S1 := \frac{|b-a|}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

$S1 = 11.25$

2. Вычислить значение определенного интеграла методом парабол с числом интервалов разбиения равным N

$$Spar(n) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{|b-a|}{n}}{6} \cdot \left[f\left[a + (i-1)\cdot\frac{|b-a|}{n}\right] + 4 \cdot f\left[a + \left(i - \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{|b-a|}{n}\right] + f\left(a + i \cdot \frac{|b-a|}{n}\right)\right]$$

Для проверки работы формулы используем значение n=1 (должно совпасть с вычисленным значением в пункте 1) и n=10 (должно стремиться к точному значению)

$Spar(1) = 11.25$

$Spar(10) = 11.696$

3. Определить число интервалов разбиения для заданной точности (E=0.01), и найти значение определенного интеграла методом парабол с числом интервалов разбиения равному этому N

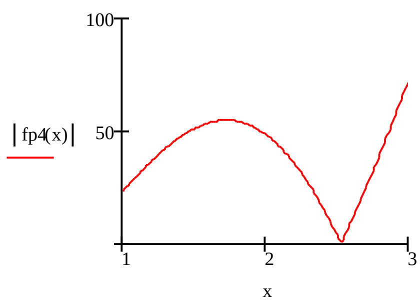
Найдем символьно четвертую производную

$$fp4(x) := \frac{d^4}{dx^4} f(x) \rightarrow 24 \cdot \cos(x) - 36 \cdot x \cdot \sin(x) - 12 \cdot x^2 \cdot \cos(x) + x^3 \cdot \sin(x)$$

20

Построим график модуля четвертой производной на отрезке интегрирования

$x := a, a + 0.01 .. b$



По графику видно, что свое максимальное значение модуль четвертой производной принимает в граничной точке отрезка b

$max := |fp4(b)|$

$max = 71.729$

Запишем формулу ошибки

$$R(n) := \frac{(b-a)^5}{2880 \cdot n^4} \cdot max$$

Применим эту формулу для n=10 и сравним полученную оценку погрешности с точным значением погрешности

Оценка погрешности по формуле для n=10

$R(10) = 7.97 \times 10^{-5}$

Точным значение погрешности

$|S - Spar(10)| = 2.458 \times 10^{-5}$

Видно, что формула дает оценку погрешности с большим запасом

Д ля сравнения оценим погрешность по правилу Рунге для n=10

$$\frac{|Spar(10) - Spar(5)|}{15} = 2.508\times 10^{-5}$$

Видно, что применение правила Рунге дает более точную оценку погрешности, чем применение формулы.
Для вычисление количество точек, необходимых для достижения данной точности E=0.001, зададим произвольно начальное приближение n=1 и решим уравнение Ошибка(n)-точность=0, используя встроенную в Mathcad функцию, решающую уравнения root

Точность

$Epsi := 0.001$

Начальное приближение

$n := 1$

Решение уравнения

$$n := root\left[\left[\frac{(b - a)^5}{2880 \cdot n^4} \cdot max - Epsi\right], n\right]$$

Результат

$n := floor(n)$

$n = 4$

(floor - функция округления)
Значение определенного интеграла, вычисленное методом прямоугольников с числом интервалов разбиения равному найденному N, и ошибка вычисления

$Spar(n) = 11.695$

$|Spar(n) - S| = 9.923\times 10^{-4}$

4. Оценить погрешность для вычисленного значения интеграла с числом интервалов разбиения равному найденному N по формуле Рунге

$$\frac{1}{15} \cdot \left|Spar\left(floor\left(\frac{n}{2}\right)\right) - Spar(n)\right| = 1.122\times 10^{-3}$$

Точное значение погрешности при этом равно

$|Spar(n) - S| = 9.923\times 10^{-4}$

5. Построить график зависимости ошибки вычисления от N и график приближенного значения интеграла от N
Зададим интервал изменения N от 2 до 10 с шагом 1

$n := 2..10$

График зависимости приближенного значения интеграла от N (на график нанесено также и точное значение интеграла)

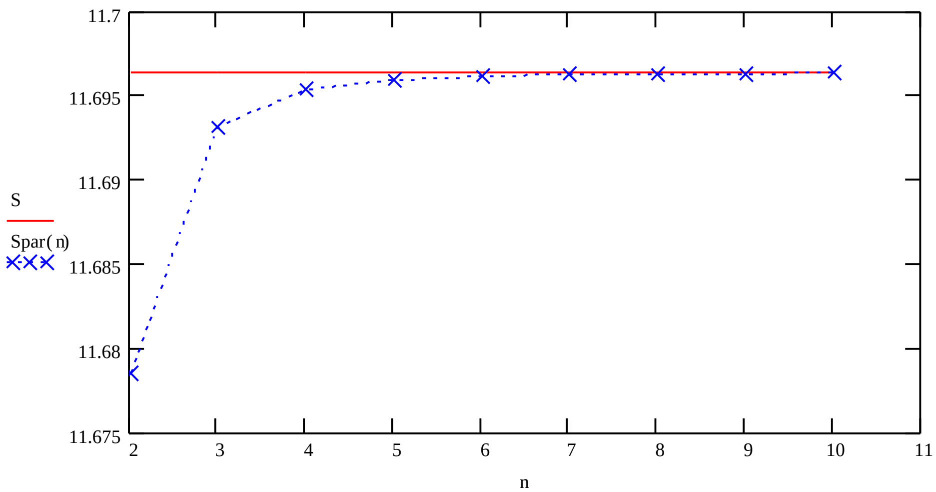
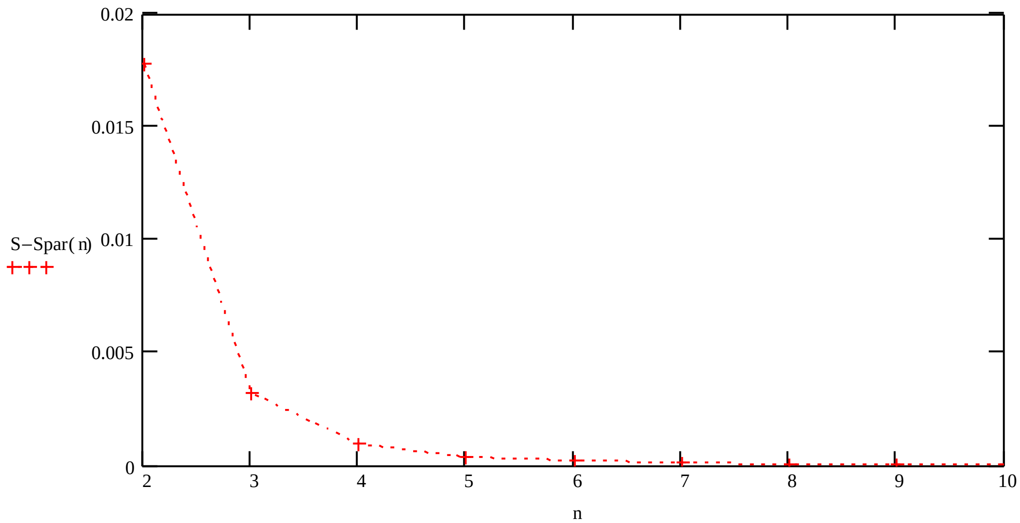


График зависимости ошибки вычисления от N



Борис Николаевич Сидоров
Алексей Михайлович Никулин

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Методические указания к лабораторной работе по курсу " Информатика"

Редактор М.А.Соколова
Подписано в печать объем п.л.
Тираж 75 экз. Бесплатно. Заказ

Ротапринт МАТИ – РГТУ , Берниковская наб.,14