Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
"МАТИ"- РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО

Кафедра высшей математики

MAPLE В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Методические указания к практическим занятиям
по теме: "Ряды в приближенных вычислениях"

Составитель Ю.М. Раппопорт

Москва 2004 г.

1.Введение

Использование современных информационно-коммуникационных технологий при изучении курса высшей математики студентами технических вузов значительно повышает эффективность процесса обучения. Настоящее учебно-методическое пособие представляет собой один из шагов в развитие этого направления.

В настоящем методическом пособии излагаются некоторые теоретические результаты по теории рядов и их использованию в приближенных вычислениях, а также на ряде примеров показывается применение пакета MAPLE при изучении этих разделов курса.

2.Методы теории приближения в численном анализе. Пакет Maple

Курс высшей математики для студентов технических вузов содержит первичные основы численных методов как свою составную часть. Для специалистов инженерного профиля крайне важным представляется одновременное нахождение решения в замкнутой аналитической форме и получение численных значений результанта. Представление функции в виде степенного ряда позволяет свести изучение свойств приближаемой функции к более простой задаче изучения этих свойств у соответствующего аппроксимирующего полиномиального разложения. Этим обьясняется важность всевозможных аналитических и численных приложений полиномиальных приближений для аппроксимации и вычисления функции. Замена функций на их степенные разложения и полиномиальные приближения помогает изучению пределов, анализу сходимости и расходимости рядов и интегралов, приближенному вычислению интегралов и решению дифференциальных уравнений. Степенные ряды и разложения по многочленам Чебышева широко используются при вычислении значений функции с заданной степенью точности. Они являются эффективным вычислительным средством при решении широкого круга научно-технических задач.

Одним из наилучших по эффективности и мощности математических пакетов для использования студентами, изучающими курс математического анализа, является MAPLE. Пакет MAPLE является как аналитическим инструментом, так и средством программирования. Это одна из наиболее мощных систем аналитических вычислений. Она позволяет значительно повысить скорость выполнения математических операций. Язык программирования, графический интерфейс, 2-D и 3-D визуализации позволяют легко получать графические иллюстрации изучаемых математических понятий. Система MAPLE позволяет использовать другие вычислительные системы и языки программирования MATLAB, Visual Basic, Java, Фортран и Си. Процедуры MAPLE могут вызываться из внешних программ. Файлы MAPLE могут преобразовываться в такие форматы подготовки и редактирования математических текстов как HTML, MathML, XML, RTF, LaTeX и другие. Важнейшим элементом MAPLE систем является удобство их использования для студентов и преподавателей в Интернете. Программы MAPLE могут просчитываться и обрабатываться на компьютерах через Интернет в режиме удаленного доступа.

Система MAPLE создает естественную обучающую среду для студентов естественно-научного и технического профиля по обучению курсу математического анализа. При решении любой части математической проблемы студент может применить правило математического анализа или использовать команду MAPLE. В частности визуализация способствует пониманию характера сходимости изучаемых нами разложений в ряды для различных функций. Пакет MAPLE содержит специальные процедуры для символьных операций и получения численных результатов с формальными степенными рядами, численными аппроксимациями, ортогональными полиномами, разложениями в ряды, специальными функциями, рациональными приближениями и непрерывными дробями. Применение математических пакетов студентом при обучении способствует использованию их расширенных возможностей техническим специалистом в своей дальнейшей инженерной деятельности.

3.Приближенное вычисление математических функций

Пусть функция $f(x)$ задана на интервале (x_0-R, x_0+R) и нам требуется вычислить значение функции $f(x)$ при $x=x_1 \in (x_0-R, x_0+R)$ с заданной точностью $\epsilon > 0$.

Предположив, что функция $f(x)$ в интервале $x \in (x_0-R, x_0+R)$ раскладывается в степенной ряд

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} u_i(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-x_0)^i=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+...,$$

мы получим, что точное значение $f(x_1)$ равно сумме этого ряда при $x = x_1$

$$f(x_1) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x_1 - x_0)^i = a_0 + a_1(x_1 - x_0) + a_2(x_1 - x_0)^2 + ... + a_n(x_1 - x_0)^n + ...,$$

а приближенное - частичной сумме $S_n(x_1)$

$$f(x_1) \approx S_n(x_1) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x_1 - x_0)^i = a_0 + a_1(x_1 - x_0) + a_2(x_1 - x_0)^2 + ... + a_n(x_1 - x_0)^n.$$

Для погрешности приближения мы имеем выражение в виде остатка ряда

$$f(x_1) - S_n(x_1) = r_n(x_1),$$

где

$$r_n(x_1) = \sum_{i=1}^{\infty} x_1^{n+i} = a_{n+1}x_1^{n+1} + a_{n+2}x_1^{n+2} + ...$$

Для знакопеременных рядов с последовательно убывающими членами

$$|r_n(x)| = |\sum_{i=1}^{\infty} u_{n+i}(x_1)| < |u_{n+1}(x_1)|.$$

Точность аппроксимации, как правило, возрастает с ростом степени приближающего степенного разложения и тем выше, чем точка x ближе к точке x_0. Для равномерной аппроксимации на интервале наиболее удобными оказываются разложения по многочленам Чебышева.

Для приближенного нахождения значений функции посредством степенных рядов, как правило, используются ее разложения в виде рядов Тейлора.

Ряд Тейлора для функции $f(x)$ - это степенной ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

где числовая функция f предполагается определенной в некоторой окрестности точки x_0 и имеющей в этой точке производные всех порядков.

Многочленами Тейлора для функции $f(x)$, порядка n соответственно, называются частные суммы ряда Тейлора

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Если мы распишем эту формулу, то получим следующее выражение

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Формула Тейлора для функции $f(x)$ - это представление функции в виде суммы ее многочлена Тейлора степени $n (n = 0, 1, 2, ...)$ и остаточного члена. Другими словами это называют разложением функции $f(x)$

по формуле Тейлора в окрестности точки x_0. Если действительная функция f одного переменного имеет n производных в точке x_0, то ее формула Тейлора имеет вид

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x),$$

где

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

- многочлен Тейлора степени n, а остаточный член может быть записан в форме Пеано

$$r_n(x) = o((x-x_0)^n), x \to x_0.$$

Получаем, что

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Если функция f дифференцируема $n+1$ раз в некоторой окрестности точки $x_0, (x_0-\delta, x_0+\delta), \delta > 0$, то остаточный член в этой окрестности может быть записан в форме Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)},$$

$$0 < \theta < 1, x \in (x_0-\delta, x_0+\delta).$$

Заметим, что при $n = 1$ выражение для $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ совпадает с формулой Лагранжа конечных приращений для функции $f(x)$.

Формула Тейлора для многочленов. Пусть имеется произвольный многочлен $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$. Тогда при любых x и h имеет место следующая формула:

$$f(x+h) = a_0(x+h)^n + a_1(x+h)^{n-1} + ... + a_n =$$
$$= f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k + ... + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n.$$

Рядом Маклорена для функции $f(x)$ называется ее ряд Тейлора в точке 0 начала координат, то есть таким образом это степенной ряд вида

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Таким образом формула Маклорена является частным случаем формулы Тейлора. Предположим, что функция $f(x)$ имеет n производных в точке $x = 0$. Тогда в некоторой окрестности этой точки $(-\delta, \delta), \delta > 0$, функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + r_n(x),$$

$$x \in (-\delta, \delta),$$

где $r_n(x)$ - остаточный член $n-$ ого порядка в форме Пеано.

Приведем разложения по формуле Маклорена для основных элементарных математических функций:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}),$$

$$cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n),$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

В MAPLE существует специальная команда, позволяющая вычислять ряды и многочлены Тейлора: $taylor(expr, eq/nm, n)$. Здесь $expr$ -разлагаемое в ряд выражение, eq/nm - равенство (в виде $x = a$) или имя переменной (например x), n - необязательный параметр, указывающий на порядок разложения и представленный целым положительным числом (при отсутствии указания порядка он принимается равным по умолчанию 6). Если eq/nm задается в виде $x = a$, то разложение производится относительно точки $x = a$. Если eq/nm указывается просто в виде имени переменной, то производится вычисление ряда и многочлена Маклорена.

Пример 1. Найти многочлен Тейлора 9-ой степени экспоненциальной функции e^x в начале координат.
$> p9 := taylor(exp(x), x = 0, 10);$
Получается следующий результат для формулы Тейлора

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{5040}x^7 + \\ + \frac{1}{40320}x^8 + \frac{1}{362880}x^9 + O(x^{10})$$

и находим сам многочлен Тейлора по следующей процедуре преобразования результата в многочлен
$> p9 := convert(p9, polynom);$

В результате имеем многочлен Тейлора

$$p_9(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{40320}x^8 + \frac{1}{362880}x^9$$

Многочлены Тейлора дают наиболее точную аппроксимацию приближаемой функции вблизи точки x_0. По мере удаления от точки x_0 погрешность возрастает. Для приближения приходится использовать многочлены Тейлора более высокой степени, но иногда и они не помогают в связи с накоплением вычислительной погрешности.

Интересно проследить этот процесс графически. Пакет Maple предоставляет такую возможность с помощью команды plot.

Пример 2. Найти число e с точностью до 0.001. Положим $x = 1$. Тогда чтобы вычислить значение e нам надо выполнить команду
$> eval(p9, x = 1);$
Получаем 98641/36288 и далее
$> evalf(98641/36288);$
дает результат 2.718281526.

Интересно провести вычисления и сравнить результаты, получающиеся для числа e при различных степенях используемого многочлена Тейлора. Получаются следующие результаты:

$k=1, e_1=1, k=2, e_2=2, k=3, e_3=2.5, k=4, e_4=2.666666667, k=5, e_5=2.708333333, k=6, e_6=2.716666667, e_7=2.718055556, k=8, e_8=2.718253968, k=9, e_9=2.718281526, e_{10}=2.718281801.$

Отсюда видно, что число e с точностью 0.001 вычисляется, начиная с многочлена Тейлора 7-ой степени. Также следует, что число e с точностью 0.000001 или что то же самое 10^{-6} вычисляется, начиная с многочлена Тейлора 9-ой степени.

Оценку остатка ряда произведем по формуле остаточного члена ряда Маклорена

$$|f(x_1)-S_n(x_1)|=|r_n(x_1)|=|\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}|,$$

где c находится между 0 и x_1. Следует $r_n(1)=\frac{e^c}{(n+1)!}, 0<c<1$. Так как $e^c<e<3$, то $r_n(1)<\frac{3}{(n+1)!}$. При $n=7$ имеем $r_7<\frac{3}{7!}<0.001, e\approx 2.718$.

Наряду с командой $taylor$ для разложения функций и выражений в ряды использутся команда $series$. Результатом выполнения команды $series$ может быть построение ее ряда Тейлора, асимптотического ряда или же некоторого обобщенного ряда, даже если ее ряд Тейлора не существует.

Для разложения в ряд Тейлора функции нескольких переменных используется команда $mtaylor$.

Пример 3. Найти многочлен Тейлора 6-ой степени от функции $\frac{x}{1+x}$.

Делаем следующую команду MAPLE.
$> h:=x/(1+x);$

Получаем
$h:=\frac{x}{1+x}$.
Далее находим формулу Тейлора командой
$> taylor(h,x,6);$

$$h(x)=x-x^2+x^3-x^4+x^5+O(x^6)$$

и многочлен Тейлора командой
$> h:=convert(h,polynom);$
$h_6(x)=x-x^2+x^3-x^4+x^5.$

Пример 4. Найти разложение функции $\arccos(x)$ в ряд Маклорена.

Выполняем команду
$> taylor(arccos(x),x,12);$

Получаем результат
$\arccos(x)=-\frac{\pi}{2}-x-\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{40}x^5-\frac{5}{112}x^7-\frac{35}{1152}x^9-\frac{63}{2816}x^{11}+O(x^{12}).$

Пример 5. Найти разложение функции $\exp(x)+1$ по формуле Тейлора 4-ой степени в окрестности точки $x=2$.

Выполняем команду
$> taylor(exp(x)+1,x=2,5);$

Получаем результат

$$(e^2+1)+e^2(x-2)+\frac{1}{2}e^2(x-2)^2+\frac{1}{6}e^2(x-2)^3+\frac{1}{24}e^2(x-2)^4+O((x-2)^5).$$

Пример 6.Найти разложение гиперболического косинуса в ряд Маклорена 8-ой степени.

$> taylor(cosh(x),x,10);$

Получаем
$1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{720}x^6+\frac{1}{40320}x^8+O(x^{10})$.

Заметим, что у аналитических функций их разложения в ряд Тейлора существуют всегда. Приведем пример функции, не имеющей разложения в ряд Тейлора и для которой команда *taylor* не дает результат: $f(x)=1/x^2+x$.
$> taylor(1/x^2+x,x,7);$

В ответ на выполнение этой команды MAPLE дает ответ:

Error, does not have a taylor expansion, try series(),
что значит "Ошибка, разложение Тейлора не существует, используйте команду series()". В результате выполнения команды
$> series(1/x^2+x,x,7);$
получаем исходное выражение $x^{-2}+x$. В то же время в окрестности других точек, например точки $x=2$, формула Тейлора вычисляется
$> taylor(1/x^2+x,x=2,7);$
$\frac{9}{4}+\frac{3}{4}(x-2)+\frac{3}{16}(x-2)^2-\frac{1}{8}(x-2)^3+\frac{5}{64}(x-2)^4-\frac{3}{64}(x-2)^5+\frac{7}{256}(x-2)^6+O((x-2)^7)$.

Пакет Maple дает возможность как нахождения разложений математических функций в ряды Тейлора, так и графической интерпретации точности этих разложений. Подобная графическая визуализация помогает пониманию сходимости многочленов Тейлора к самой приближаемой функции.

Рассмотрим примеры такой графической визуализации для функции $\cos(x)$. Сравним графики самой функции $\cos(x)$ с графиками ее разложений Тейлора различных степеней.

Пример 7. Сравним функцию $\cos(x)$ с ее разложением Маклорена 5-ой степени на интервале $[-4,4]$.
$> appr := taylor(cos(x),x=0,5);$
$appr := 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+O(x^6)$
$> polyn := convert(appr, polynom);$
$polyn := 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4$
$> plot(\{cos(x),polyn\},x=-4..4,color=black);$

$\cos(x)$ и его разложение в ряд Маклорена 5-ой степени

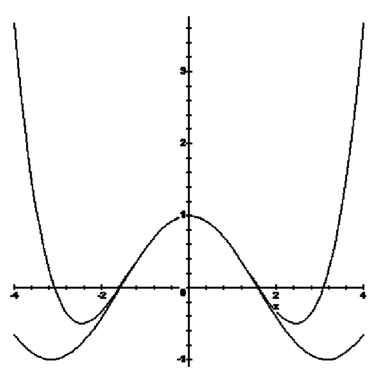

Рис. 1. Построение функции $cos(x)$ и ее разложения в ряд Маклорена 5-ого порядка

Легко заметить, что при небольших значениях x графики самой функции и приближающего ее разложения практически совпадают, однако при возрастании x начинают отличаться.

Пример 8. Сравним функцию $\cos(x)$ с ее разложением Маклорена 9-ой степени на интервале $[-4,4]$.
$> appr := taylor(cos(x),x=0,9);$
$appr := 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6+\frac{1}{40320}x^8+O(x^9)$
$> polyn := convert(appr, polynom);$
$polyn := 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6+\frac{1}{40320}x^8$
$> plot(\{cos(x),polyn\},x=-4..4,color=black);$

$\cos(x)$ и его разложение в ряд Маклорена 9-ой степени

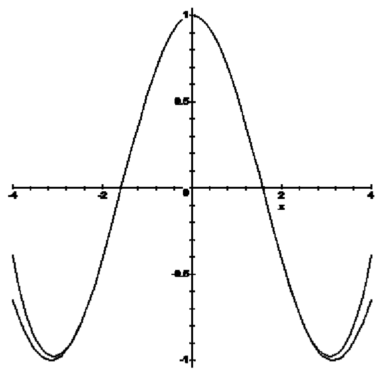

Рис. 2. Построение функции $cos(x)$ и ее разложения в ряд Маклорена 9-ого порядка.

Пример показывает, что при использовании разложения Тейлора более высокой степени точность приближения возрастает и удается достичь удовлетворительного приближения на более широком интервале. Однако заметим, что степень разложения Тейлора нельзя повышать неограниченно в связи с накапливанием вычислительной погрешности.

Пример 9. Сравним функцию $\cos(x)$ и ее разложение Тейлора 9-ой степени относительно точки $x = 1$.
$> y(x) := convert(taylor(cos(x), x = 1, 9), polynom);$

$$y(x) := \cos(1) - \sin(1)(x-1) - \frac{1}{2}\cos(1)(x-1)^2 + \frac{1}{6}\sin(1)(x-1)^3 + \\ + \frac{1}{24}\cos(1)(x-1)^4 - \frac{1}{120}\sin(1)(x-1)^5 - \frac{1}{720}\cos(1)(x-1)^6 + \\ + \frac{1}{5040}\sin(1)(x-1)^7 + \frac{1}{40320}\cos(1)(x-1)^8$$

$> plot(\{y(x), cos(x)\}, x = -4..4, color = black);$

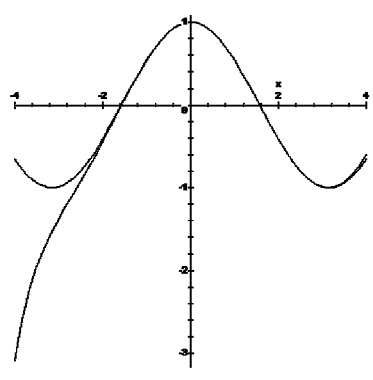

Рис. 3. Построение функции $cos(x)$ и ее разложения в ряд Тейлора 9-ой степени относительно точки $x = 1$

Данный пример показывает вид разложений Тейлора относительно ненулевых точек в их окрестностях.

4.Приближенное вычисление определенных интегралов

Ряды эффективны и удобны при приближенном вычислении определенных интегралов, не выражающихся в конечном виде через элементарные функции. Для вычисления $\int_0^x f(t)dt$ подинтегральная функция $f(t)$ раскладывается в степенной ряд. Если

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ..., \ |x| < R,$$

то при $|x| < R$ степенной ряд можно интегрировать почленно. Получаем метод вычисления интеграла $\int_0^x f(t)dt$ с любой наперед заданной точностью

$$\int_0^x f(t)dt = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + ... + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + ...$$

Пример 10. Приближенное вычисление интеграла вероятностей

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-t^2/2} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt.$$

Так как

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ..., \ |x| < \infty,$$

то

$$e^{-x^2/2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2 2!} - \frac{x^6}{2^3 3!} + ...$$

Подставив этот ряд под знак интеграла и произведя почленное интегрирование получаем

$$\phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^5}{5 \cdot 2^2 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 2^3 \cdot 3!} + ... \right].$$

Так как это знакопеременный ряд с последовательно убывающими слагаемыми, то погрешность вычисления интеграла последовательно убывает и не превышает последнего слагаемого.

Для неопределенного и определенного интегрирования функциональных выражений в Maple используются соответственно процедуры

$$int(\text{выражение}, \text{переменная});$$

и

$$int(\text{выражение}, \text{переменная} = a..b),$$

где a и b являются пределами интегрирования.

Процедура $Int()$ используется для отображения интеграла в символьной форме.

Пример 11. Вычислить интеграл от функции $ax^2 \cos(bx)$.
$> f := a * x\hat{}2 * cos(b * x);$

$$f := ax^2 \cos(bx)$$

$> int(f, x);$

$$\frac{a(b^2 x^2 \sin(bx) - 2\sin(bx) + 2\cos(bx))}{b^3}$$

$> int(f, x = 0..1);$

$$\frac{a(b^2 \sin(b) - 2\sin(b) + 2b\cos(b))}{b^3}.$$

Для численного вычисления определенного интеграла используется команда $evalf()$:

$$evalf(int(f, x = a..b));$$

$$evalf(Int(f, x = a..b));$$

Пример 12. Вычислить интеграл от функции $\cos(x)\ln(x)$ в пределах от 0 до 1.

$> int(cos(x)*ln(x), x = 0..1);$

$$-Si(1)$$

Указанный интеграл вычисляется в аналитическом виде, но выражается через специальную функцию - интегральный синус. Для получения численного результата могут использоваться таблицы интегрального синуса или же нижеприводимая процедура численного интегрирования.
$> evalf(int(cos(x)*ln(x), x = 0..1));$

$$-0.9460830704.$$

Пример 13. Вычислить интеграл от ax^k.
$> Int(a*x\hat{}k, x) = int(a*x\hat{}k, x);$

$$\int ax^k\,dx = a\frac{ax^{(k+1)}}{k+1}$$

$> int(2*x\hat{}7, x = 2..3);$

$$\frac{6305}{4}$$

$> evalf(\%);$

$$1576.25$$

Вычисление сумм интегралов, интегралов сумм и интегралов от полиномов производится следующим образом:
$> Sum(Int(a[k]*x\hat{}k, x), k = 1..6);$

$$\sum_{k=1}^{6}\int a_k x^k\,dx$$

$> value(\%);$

$$\frac{1}{2}a_1x^2 + \frac{1}{3}a_2x^3 + \frac{1}{4}a_3x^4 + \frac{1}{5}a_4x^5 + \frac{1}{6}a_5x^6 + \frac{1}{7}a_6x^7$$

$> P(x) := a*x\hat{}4 + b*x\hat{}3 + c*x\hat{}2 + d*x + e;$

$$P(x) := ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$> int(P(x), x);$

$$\frac{ax^5}{5} + \frac{bx^4}{4} + \frac{cx^3}{3} + \frac{dx^2}{2} + ex.$$

Дадим пример приближенного представления интеграла в виде полинома некоторой степени в том случае, когда он не вычисляется в замкнутой аналитической форме.

Пример 14. Вычислить интеграл от $e^{\cos(x)}$. $> int(exp(cos(x)), x);$

$$\int e^{\cos(x)}dx$$

$> convert(taylor(\%, x = 0, 10), polynom);$

$$ex - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{30}ex^5 - \frac{31}{5040}ex^7 + \frac{379}{362880}ex^9.$$

Пример 15. Вычислить $\int_0^1 e^{-x^2/2}dx$ с точностью до 0.02.

Используем рассмотренный ранее пример 10. Подставив в соответствующую формулу $x = 1$, получим что для получения требуемой точности достаточно взять три первых слагаемых, так как

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{7 \cdot 2^3 \cdot 3!} = 0.019947 < 0.02.$$

Действительно сумма первых трех слагаемых равняется 0.68..., что согласуется с табличными данными.

Опишем применение пакета MAPLE при приближенном вычислении этого интеграла посредством разложения в ряды.

$> int(exp(-x\hat{}2/2), x);$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{2}erf(\frac{\sqrt{2}x}{2})$$

$> convert(taylor(\%, x = 0, 8), polynom);$

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{336}x^7$$

$> evalf(\%);$

$$x - 0.1666666667x^3 + 0.02500000000x^5 - 0.002976190476x^7$$

$> eval(\%, x = 1);$

$$0.8553571428.$$

5.Приближенное решение дифференциальных и интегральных уравнений

Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений осуществляется в MAPLE командой $dsolve()$, позволяющей находить решение в аналитическом виде и получать численное решение задачи.

Процедура $dsolve()$ имеет следующий формат

$$dsolve(\text{уравнения}, \text{неизвестные}, [\text{опции}]);$$

При задании в команде $dsolve()$ опции $type = series$ ищется приближенное решение дифференциального уравнения в виде ряда Тейлора.

Более подробно материал настоящего раздела предполагается изложить в отдельном учебно-методическом пособии.

При работе над подготовкой настоящих методических указаний использовалась следующая учебная и математическая литература общей направленности, рекомендуемая и для дальнейшей самостоятельной работы.

Литература

1. Л.Д.Кудрявцев *Математический анализ*, М., Высшая школа, 1981.- Т.I,II.
2. И.И.Баврин *Высшая математика*, М., Академия,2002.
3. Д.Т.Письменный *Конспект лекций по высшей математике*, М., Айрис Пресс, 2002.-ч.1,2.
4. П.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова *Высшая математика в упражнениях и задачах*, М., Оникс, 2002.-ч.1,2.
5. А.В.Ефимов и др. *Сборник задач по математике*, М., Физматлит, 2002.
6. К.Н.Лунгу и др. *Сборник задач по высшей математике*, М., Айрис Пресс, 2001.
7. А.В.Матросов *Maple 6. Решение задач высшей математики и механики*, Санкт-Петербург, BHV, 2001.
8. В.П.Дьяконов *Maple 7. Учебный курс*, Санкт-Петербург, Питер, 2002.
9. А.Н.Васильев *Maple 8. Самоучитель*, М., Диалектика, 2003.
10. И.Е.Ануфриев *MatLab 5.3/6.X. Самоучитель*, Санкт-Петербург, BHV, 2002.
11. Ю.Ю.Тарасевич *Информационные технологии в математике*, Москва, Солон-Пресс, 2003.
12. О.Ю.Агарева, Е.В.Введенская, К.Ю.Осипенко *Maple в курсе математического анализа. Методические указания к практическим занятиям по теме: "Предел функции. Непрерывность."*, М., МАТИ-РГТУ им. К.Э.Циолковского, 1999.

13. О.Ю.Агарева, Е.В.Введенская, К.Ю.Осипенко *Maple в курсе математического анализа. Методические указания к практическим занятиям по теме: "Дифференцирование функций."*, М., МАТИ-РГТУ им. К.Э.Циолковского, 1999.
14. Ю.М.Раппопорт *Maple в курсе математического анализа. Методические указания к практическим занятиям по теме: "Формула Тейлора."*, М., МАТИ-РГТУ им. К.Э.Циолковского, 2003.
15. http://www.Exponenta.ru .
16. http://www.maplesoft.com .

Оглавление