Министерство образования Российской Федерации

"МАТИ"- РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО

Кафедра "Высшая математика"

В. В. Горбацевич, К. Ю. Осипенко

Уравнения с частными производными первого порядка и классификация линейных уравнений второго порядка

Методическое пособие по курсу «Уравнения с частными производными»

Москва 2001 г.

ВВЕДЕНИЕ

Это пособие относится к серии методических пособий, посвященных изложению различных специальных разделов математики, и предназначено для преподавателей и студентов МАТИ. Пособие отличается от имеющихся учебников и других пособий большей доступностью изложения и учетом специфики технического ВУЗа, оно может быть использовано преподавателями при подготовке к лекциям, проведению занятий, а студентами – при самостоятельной работе и подготовке к экзаменам.

Данное методическое пособие посвящено изложению вопросов, относящихся к курсу уравнений с частными производными (уравнений математической физики). Рассматриваются основные понятия и определения, связанные с уравнениями с частными производными и вопросы приведения к каноническому виду линейных уравнений второго порядка. В последующих выпусках предполагается изложить вопросы, относящиеся к аналитическим методам решения основных уравнений математической физики (гиперболических, параболических и эллиптических) и численным методам их решений.

Изложение ведется на уровне математической строгости, достаточном для решения прикладных задач в удобном для усвоения материала будущими инженерами-технологами. Иногда оказывается удобным не оговаривать подробно условия дифференцируемости, накладываемые на используемые функции. Обычно считается, что функции имеют столько производных, сколько это необходимо в рассматриваемом случае (в наиболее важных вопросах условия дифференцируемости все же явно указываются). Кроме того, все функции предполагаются заданными в их естественной области определения, которая явно не всегда оговаривается.

Глава 1. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§1. Общие понятия

Пусть имеется функция u независимых переменных $x_1, x_2, ..., x_n$. Уравнением с частными производными называется соотношение, связывающее переменные $x_1, x_2, ..., x_n$, функцию u и все ее частные производные до некоторого порядка

$$F(x_1, ..., x_n, u, u_{x_1}, ..., u_{x_n}, u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, ...) = 0. \qquad (1.1)$$

Порядком уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Функция $u = u(x_1, ..., x_n)$ называется решением уравнения (1.1), если при подстановке ее в это уравнение оно обращается в тождество при допустимых значениях аргументов. Совокупность всех решений уравнения называется общим решением.

Рассмотрим некоторые примеры уравнений с частными производными для функции, зависящей от двух переменных $u = u(x, y)$.

Пример 1.1. Пусть дано уравнение $u_x = 0$. Это уравнение фактически означает, что функция $u(x, y)$ не зависит от x. Следовательно, решениями являются, например, функции $u(x, y) = y^2 + 2y$, $u(x, y) = e^y + \sin y$. Общее решение: $u(x, y) = C(y)$, где C – произвольная функция одной переменной y.

Пример 1.2. Рассмотрим уравнение $u_x = f(x, y)$. Для нахождения решения этого уравнения проинтегрируем его по переменной x

$$\int u_x dx = \int f(x, y) dx + C. \qquad (1.2)$$

При интегрировании по x мы считаем y постоянным и поэтому произвольная постоянная C в (1.2) может зависеть от y. Тем самым общее решение имеет вид:

$$u(x,y)=\int f(x,y)dx+C(y).$$

Пример 1.3. Пусть дано уравнение $u_{xy}=0$. Из примера 1.1 следует, что $u_y=C(y)$. Решая это уравнение аналогично тому, как решалось уравнение в примере 1.2, будем иметь

$$u(x,y)=\int C(y)dy+C_1(x).$$

Обозначим $C_2(y)=\int C(y)dy$. Тогда общее решения примет вид

$$u(x,y)=C_1(x)+C_2(y).$$

Заметим, что в отличие от общего решения обыкновенного дифференциального уравнения, зависящего от произвольных постоянных, общее решение уравнения с частными производными зависит от произвольных функций.

§2. Задача Коши

Будем рассматривать случай, когда искомая функция u зависит от двух переменных x, y. Тогда уравнение первого порядка будет иметь вид

$$F(x,y,u,u_x,u_y)=0. \qquad (2.1)$$

Всякое решение уравнения (2.1) $u=u(x,y)$ будем называть интегральной поверхностью (график решения – поверхность в пространстве с координатами x,y,u).

Для того, чтобы из совокупности всех решений уравнений (2.1) выделить некоторое частное решение, формулируется задача Коши: найти решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условию

$$u(x,y)|_{x=x_0}=\varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ - некоторая заданная функция.

Обозначим через l кривую в пространстве x,y,u, задаваемую уравнениями

$$x=x_0, \quad u=\varphi(y). \quad (2.2)$$

Тогда задача Коши имеет следующий геометрический смысл: среди всех интегральных поверхностей найти ту, которая проходит через заданную кривую l.

Можно поставить более общую задачу Коши, не ограничивая кривую l видом (2.2), а беря произвольную пространственную кривую. Если обозначить через l проекцию кривой на плоскость (x,y), то эта задача Коши может быть сформулирована следующим образом: найти решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условию

$$u(x,y)|_{(x,y)\in l}=\varphi(x,y).$$

§3. Линейные однородные уравнений первого порядка

Уравнение с частными производными называются линейными, если искомая функция $u(x,y)$ и ее частные производные входят в уравнение линейно. Таким образом, линейное уравнение первого порядка имеет вид

$$A(x,y)u_x+B(x,y)u_y+C(x,y)u=f(x,y), \qquad (3.1)$$

где A, B, C и f - заданные функции. Если $f(x,y)=0$, то уравнение называется однородным.

Отметим, что основные свойства линейных уравнений с частными производными во многом аналогичны свойствам обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Так, например, линейная комбинация решений однородного уравнения тоже является решением этого уравнения. Общее решение неоднородного уравнения может быть представлено в виде некоторого частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Будем рассматривать сначала однородное линейное уравнение вида

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y = 0. \quad (3.2)$$

Этому уравнению поставим в соответствие систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = B(x,y), \end{cases} \qquad (3.3)$$

которую будем называть <u>характеристической системой</u> для уравнения (3.2), а всякое решение $x(t), y(t)$ этой системы назовем <u>характеристикой</u>.

Функция $\varphi(x,y)$, не сводящаяся тождественно к постоянной, или равенство $\varphi(x,y) = C$ называется <u>первым интегралом</u> системы (3.3), если при подстановке в нее любого решения системы получается постоянная величина, зависящая лишь от выбора решения.

<u>**Теорема 3.1.**</u> *Пусть* $\varphi(x,y) = C$ *есть первый интеграл системы (3.3). Тогда функция* $u = \varphi(x,y)$ *удовлетворяет уравнению (3.2).*

<u>Доказательство.</u> Подставим в первый интеграл системы (3.3) какое-либо решение $x(t), y(t)$ этой системы. Получим

$$\varphi(x(t), y(t)) = C.$$

Возьмем производную по t от обеих частей этого равенства

$$\frac{d\varphi(x(t), y(t))}{dt} = \varphi_x \frac{dx}{dt} + \varphi_y \frac{dy}{dt} \equiv 0.$$

Поскольку $x(t), y(t)$ - решения характеристической системы (3.3), имеем

$$\varphi_x A(x,y) + \varphi_y B(x,y) = 0.$$

В силу того, что последнее равенство выполнено для любого решения системы (3.3), оно справедливо для любых x, y, входящих в область определения. Тем самым функция φ удовлетворяет уравнению (3.2). Теорема доказана.

Можно доказать и обратное утверждение.

<u>**Теорема 3.2.**</u> *Пусть функция* $u = \varphi(x,y)$ *удовлетворяет уравнению (3.2). Тогда* $\varphi(x,y) = C$ *есть первый интеграл системы (3.3).*

<u>Доказательство.</u> Подставим в функцию $\varphi(x,y)$ какое-нибудь решение системы (3.3) $x(t), y(t)$ и возьмем полную производную по t

$$\frac{d\varphi(x(t), y(t))}{dt} = \varphi_x \frac{dx}{dt} + \varphi_y \frac{dy}{dt} = \varphi_x A(x,y) + \varphi_y B(x,y).$$

Поскольку φ - решение уравнения (3.2), имеем

$$\frac{d\varphi(x(t), y(t))}{dt} = 0.$$

Следовательно,

$$\varphi(x(t), y(t)) = C,$$

а это и означает, что $\varphi(x,y) = C$ есть первый интеграл системы (3.3). Теорема доказана.

Доказанные две теоремы устанавливают эквивалентность понятий первого интеграла системы (3.3) и решения уравнения (3.2).

Если $\varphi(x,y) = C$ - первый интеграл системы (3.3), то произвольная функция $F(\varphi)$ является также первым интегралом этой системы. Следовательно, по теореме 3.1 $F(\varphi)$ удовлетворяет уравнению (3.2) при произвольной достаточно гладкой функции F.

Можно показать, что при выполнении некоторых условий всякое решение уравнения (3.2) может быть представлено в виде $u = F(\varphi)$. Отсюда вытекает следующее правило: чтобы найти общее решение уравнения (3.2), надо составить характеристическую систему (3.3) и найти первый интеграл этой системы. Общее решение уравнения (3.2) будет

$$u = F(\varphi),$$

где F - произвольная функция.

<u>Пример 3.1.</u> Рассмотрим уравнение

$$xu_x + yu_y = 0. \qquad (3.4)$$

Характеристическая система для этого уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x, \\ \dfrac{dy}{dt} = y. \end{cases} \qquad (3.5)$$

Решение этой системы (характеристики) имеет вид

$$\begin{cases} x = C_1 e^t, \\ y = C_2 e^t. \end{cases}$$

Первым интегралом системы (3.5) является функция $\varphi(x, y) = \dfrac{y}{x}$. Следовательно, общее решение уравнения (3.4) будет

$$u(x, y) = F\left(\frac{y}{x}\right),$$

т.е. произвольная однородная функция переменных x, y.

Для нахождения первого интеграла характеристической системы (3.3) можно исключить переменную t и получить обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B(x, y)}{A(x, y)}. \qquad (3.6)$$

Если $y = y(x, C)$ - общее решение этого уравнения, то выразим произвольную постоянную C через x, y и получим первый интеграл системы (3.3) $\varphi(x, y) = C$. Аналогично поступим, если будет найден общий интеграл уравнения (3.6) $F(x, y, C) = 0$.

<u>Пример 3.2.</u> Рассмотрим уравнение

$$yu_x - xu_y = 0. \qquad (3.7)$$

Характеристическая система будет иметь вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x. \end{cases} \qquad (3.8)$$

Исключим переменную t из этой системы

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Разделяя переменные, получим

$$ydy = -xdx.$$

Проинтегрировав это уравнение, находим его общий интеграл

$$x^2 + y^2 = C.$$

Это соотношение одновременно является первым интегралом для системы (3.8). Заметим, что характеристиками в данном случае будут являться окружности с центром в начале координат. Итак, общее решение уравнения (3.7) имеет вид

$$u(x, y) = F(x^2 + y^2). \qquad (3.9)$$

<u>§4. Квазилинейные уравнения первого порядка</u>

<u>Квазилинейным</u> уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$A(x, y, u)u_x + B(x, y, u)u_y = C(x, y, u). \qquad (4.1)$$

Заметим, что линейное уравнение (3.1) является частным случаем квазилинейного уравнения, в которое функция u может входить и нелинейно.

Будем искать решение уравнения (4.1) в виде неявной функции

$$\varphi(x, y, u) = C,$$

где C – произвольная постоянная. Согласно правилу дифференцирования неявной функции имеем

$$u_x = -\frac{\varphi_x}{\varphi_u}, \quad u_y = -\frac{\varphi_y}{\varphi_u}.$$

Подставляя эти выражения в (4.1) , получим для φ уравнение

$$A(x, y, u)\varphi_x + B(x, y, u)\varphi_y + C(x, y, u)\varphi_u = 0. \qquad (4.2)$$

Это уравнение отличается от уравнения (3.2) лишь тем, что коэффициенты и искомая функция φ, входящие в него, зависят от трёх переменных x, y, u. Поэтому уравнение (4.2) решается аналогично уравнению (3.2). Для этого рассматривается характеристическая система, состоящая уже из трёх уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(x, y, u), \\ \dfrac{dy}{dt} = B(x, y, u), \\ \dfrac{du}{dt} = C(x, y, u). \end{cases} \qquad (4.3)$$

Если

$$\varphi_1(x, y, u) = C_1; \quad \varphi_2(x, y, u) = C_2 \qquad (4.4)$$

<u>- два независимых</u> (под независимостью понимается разрешимость относительно каких-либо двух из переменных x, y, u равенства (4.4)) интеграла системы (4.3), то общее решение уравнения (4.2), а значит, и решение исходного уравнения (4.1) в виде неявной функции, будет иметь вид

$$\varphi = F(\varphi_1, \varphi_2), \qquad (4.5)$$

где F - произвольная функция своих аргументов.

<u>§5. Геометрическая интерпретация, задача Коши</u>

Пусть в пространстве с координатами (x, y, u) задано поле направлений

$$(A(x, y, u), B(x, y, u), C(x, y, u)),$$

т.е. в каждой точке пространства мы имеем направление, у которого направляющие косинусы пропорциональны A, B, C. Это поле направлений определяет семейство линий, таких, что любая линия семейства имеет в каждой своей точке касательную, совпадающую с направлением поля в этой точке. Это семейство линий получается в результате интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{A(x,y,u)} = \frac{dy}{B(x,y,u)} = \frac{du}{C(x,y,u)},$$

которая, если обозначить через dt общую величину написанных трех отношений, переходит в систему (4.3).

Если имеется некоторая поверхность $u = u(x,y)$, то величины u_x, u_y и -1 пропорциональны направляющим косинусам нормали к этой поверхности. Таким образом, уравнение (4.1) выражает условие перпендикулярности нормали и поверхности $u = u(x,y)$ с направлением поля, т.е. уравнение (4.1) сводится к требованию, чтобы в каждой точке искомой поверхности $u = u(x,y)$ направление, определяемое полем (A,B,C), находилось в касательной плоскости к поверхности.

Пусть некоторая поверхность $u = u(x,y)$ состоит из характеристик системы (4.3). Тогда в каждой точке этой поверхности касательная к характеристике, проходящей через эту точку, лежит в касательной плоскости к поверхности, и следовательно, эта поверхность удовлетворяет уравнению (4.1), т.е. является интегральной поверхностью этого уравнения.

Можно показать, что верно и обратное: если некоторая <u>гладкая поверхность</u> (предполагается существование и непрерывность производных u_x, u_y) удовлетворяет уравнению (4.1), то ее можно полностью заполнить характеристиками.

Из (4.5) следует, что общее уравнение интегральных поверхностей для уравнения (4.1) будет иметь вид:

$$F(j_1, j_2) = 0 \qquad (5.1)$$

(постоянную C можно не писать в силу произвольности F).

Если выбрать некоторую функцию F, а поверхность (5.1) будет геометрическим местом тех характеристик системы (4.3), у которых значения постоянных в равенствах (4.4) связаны соотношением:

$$F(C_1, C_2) = 0. \quad (5.2)$$

Решение уравнения (4.1) становится, вообще говоря, однозначно определенным, если потребовать, чтобы искомая поверхность проходила через заданную в пространстве кривую l, т.е. если решать задачу Коши. Искомая поверхность будет образованна теми характеристиками, которые выходят из точек кривой l.

Исключительным является тот случай, когда сама кривая l является характеристикой. В этом случае через линию l проходит, вообще говоря, бесчисленное множество поверхностей.

<u>Пример 5.1.</u> Рассмотрим уравнение

$$xuu_x + yuu_y = -(x^2 + y^2). \qquad (5.3)$$

Соответствующая характеристическая система будет такова:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = xu, \\ \dfrac{dy}{dt} = yu, \\ \dfrac{du}{dt} = -(x^2 + y^2). \end{cases} \qquad (5.4)$$

Из первых двух уравнений имеем

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}.$$

Отсюда $\ln|y| = \ln|C_1 x|$, что равносильно соотношению

$$\frac{y}{x} = C_1. \qquad (5.5)$$

Чтобы найти второй интеграл системы (5.4), разделим последнее ее уравнение на второе:

$$\frac{du}{dy} = -\frac{x^2 + y^2}{yu}.$$

Пользуясь равенством (5.5), получаем

$$\frac{du}{C_1dx} = -\frac{x^2+y^2}{C_1xu}.$$

Отсюда

$$udu = -x(1+C_1^2)dx.$$

Интегрируя это равенство, имеем

$$u^2 + x^2(1+C_1^2) = C_2.$$

Подставив C_1 из (5.5), получим второй интеграл

$$x^2 + y^2 + u^2 = C_2. \qquad (5.6)$$

Уравнения (5.5) определяют плоскости, проходящие через ось Ou, а уравнения (5.6) – сферы с центром в начале координат. Тем самым характеристики системы (5.4) – это семейство окружностей, лежащих в указанных плоскостях и имеющих центр в начале координат. Общее решение уравнения (5.3) будет

$$F\left(\frac{y}{x}, x^2+y^2+u^2\right) = 0, \qquad (5.7)$$

где F – производная функция двух аргументов.

Пример 5.2. Решим задачу Коши для уравнения (5.3). Среди интегральных поверхностей этого уравнения найдем ту, которая проходит через прямую

$$x = 1, \quad y = u. \qquad (5.8)$$

Исключим x, y и u из уравнений (5.5), (5.6) и (5.8).

Уравнения (5.5) и (5.8) дают

$$x = 1, \quad y = C_1, \quad u = C_1.$$

Подставляя в уравнение (5.6), получаем

$$1 + 2C_1^2 - C_2 = 0.$$

Таким образом,

$$F(C_1, C_2) = 1 + 2C_1^2 - C_2.$$

Отсюда искомая интегральная поверхность имеет вид

$$1 + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 - (x^2+y^2+u^2) = 0.$$

Пример 5.3. Будем искать интегральную поверхность для уравнения (3.7), проходящую через окружность $x^2 + y^2 = 1$ в плоскости (x, y). Из общего решения (3.9) видно что таковой будет любая поверхность

$$u = F(x^2+y^2) - F(1).$$

Например, параболоид

$$u = x^2 + y^2 - 1$$

или конус

$$u = \sqrt{x^2+y^2} - 1,$$

наконец, просто плоскость $u = 1$. Неоднозначность решения связана здесь с тем, что заданная кривая, через которую должна проходить интегральная поверхность, является характеристикой.

Глава 2. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§6. Классификация линейных уравнений второго порядка

Будем рассматривать уравнения с частными производными второго порядка, линейные относительно старших производных, т.е. имеющие вид

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \qquad (6.1)$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} являются функциями x и y.

С помощью преобразования переменных

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

допускающего обратное преобразование (для этого достаточно потребовать, чтобы функциональный определитель

$$D = \begin{vmatrix} \varphi_x & \psi_x \\ \varphi_y & \psi_y \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля), можно получить уравнение, эквивалентное исходному. Нас будет интересовать вопрос: как выбрать новые переменные ξ и η, чтобы относительно них уравнение имело наиболее простой (канонический) вид.

Перейдя к новым переменным, будем иметь

$$\begin{aligned}
&u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \\
&u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \\
&u_{xx} = (u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x)_\xi \xi_x + (u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x)_\eta \eta_x = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + u_\xi (\xi_x)_\xi \xi_x + \\
&+ u_{\eta\xi}\eta_x \xi_x + u_\eta (\eta_x)_\xi \xi_x + u_{\xi\eta}\xi_x \eta_x + u_\xi (\xi_x)_\eta \eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\eta (\eta_x)_\eta \eta_x = \\
&= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x \eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \left[(\xi_x)_\xi \xi_x + (\xi_x)_\eta \eta_x\right] + u_\eta \left[(\eta_x)_\xi \xi_x + (\eta_x)_\eta \eta_x\right] = \\
&= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x \eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}.
\end{aligned} \qquad (6.2)$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned}
&u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x \xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}, \\
&u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y \eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}.
\end{aligned} \qquad (6.3)$$

После подстановки полученных производных в (6.1) получим уравнение

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + F_1(\xi, \eta, u_\xi, u_\eta, u) = 0, \qquad (6.4)$$

где

$$\begin{aligned}
&\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x \xi_y + a_{22}\xi_y^2, \\
&\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x \eta_x + a_{12}(\xi_x \eta_y + \eta_x \xi_y) + a_{22}\xi_y \eta_y, \\
&\bar{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x \eta_y + a_{22}\eta_y^2.
\end{aligned} \qquad (6.5)$$

Заметим, что если исходное уравнение линейно, т.е.

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = b_1 u_x + b_2 u_y + cu + f,$$

то F_1 имеет вид

$$F_1(\xi, \eta, u_\xi, u_\eta, u) = \beta_1 u_\xi + \beta_2 u_\eta + \gamma u + \delta.$$

Таким образом, уравнение в этом случае снова получается линейным.

Попытаемся выбрать переменную $\xi = \varphi(x, y)$ так, чтобы коэффициент $\bar{a}_{11}$ в уравнении (6.4) был равен нулю. Для этого необходимо, чтобы $\xi = \varphi(x, y)$ было решением уравнения

$$a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x \xi_y + a_{22}\xi_y^2 = 0. \qquad (6.6)$$

Уравнение (6.6) можно записать в виде произведения

$$\left(a_{11}\xi_x - \left(-a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right)\xi_y\right)\left(a_{11}\xi_x - \left(-a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right)\xi_y\right).$$

Таким образом, решение уравнения (6.6) свелось к решению двух линейных однородных уравнений первого порядка

$$a_{11}\xi_x - \left(-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right)\xi_y = 0. \qquad (6.7)$$

Из §3 следует, что для решения уравнений (6.7) надо найти общий интеграл каждого из уравнений

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}\pm\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \qquad (6.8)$$

На вид решений уравнений (6.8) существенно влияет знак подкоренного выражения $a_{12}^2-a_{11}a_{22}$. По знаку этого выражения определяется тип уравнения (6.1).

Будем называть уравнение (6.1) в точке M

гиперболического типа, если $a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$,

эллиптического типа, если $a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$,

параболического типа, если $a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0$.

Можно убедиться в справедливости равенства

$$\bar{a}_{12}^2-\bar{a}_{11}\bar{a}_{22}=(a_{12}^2-a_{11}a_{22})D^2,$$

из которого следует, что тип уравнения не меняется при преобразовании переменных.

Следует отметить также, что тип уравнения зависит от точки M и в разных точках может быть разным.

Пример 6.1. Рассмотрим уравнение

$$u_{xx}+xu_{yy}=0, \qquad (6.9)$$

здесь $a_{11}=1, a_{12}=0$ и $a_{22}=x$, следовательно,

$$a_{12}^2-a_{11}a_{22}=-x.$$

Тем самым при $x<0$ уравнение (6.9) гиперболического типа, при $x=0$ – параболического типа, а при $x>0$ – эллиптического типа.

§7. Приведение линейных уравнений второго порядка к канонической форме

Уравнение

$$a_{11}dy^2-2a_{12}dxdy+a_{22}dx^2=0 \qquad (7.1)$$

будем называть характеристическим для уравнения (6.1), а его интегралы – характеристиками. Уравнение (7.1) распадается на два уравнения (6.8) и играет основную роль в задаче приведения к каноническому виду уравнения (6.1). Затем, что для уравнения гиперболического типа характеристики действительные и различные, для уравнений эллиптического типа – комплексные и различные, а для уравнений параболического типа обе характеристики действительные и совпадают.

Разберем каждый из этих случаев в отдельности.

1. Для уравнений гиперболического типа $a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$ и правые части уравнений (6.8) действительные и различные. Общие интегралы их $\varphi(x,y)=C$ и $\psi(x,y)=C$ определяют семейства характеристик.

Положим

$$\xi=\varphi(x,y),\quad \eta=\psi(x,y),$$

тогда коэффициенты $\bar{a}_{11}$ и $\bar{a}_{22}$ (6.5) обратятся в нуль и уравнение (6.4) после деления на коэффициент при $u_{\xi\eta}$ приведется к виду

$$u_{\xi\eta}=\Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta),$$

где $\Phi=-\dfrac{F_1}{2\bar{a}_{12}}$. Это – так называемая каноническая форма уравнений гиперболического типа. Часто пользуется другой канонической формой. Положим

$$\alpha=\frac{\xi+\eta}{2},\qquad \beta=\frac{\xi-\eta}{2},$$

где α и β - новые переменные. Тогда

$$u_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta),\qquad u_\eta = (u_\alpha - u_\beta),\qquad u_{\xi\eta} = (u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta})$$

и уравнение (7.2) примет вид

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1,$$

где $\Phi_1 = 4\Phi$.

2. Для уравнений параболического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0,$ и уравнение (6.8) дает один общий интеграл $\varphi(x,y) = C.$ Положим в этом случае

$$\xi = \varphi(x,y),\qquad \eta = \psi(x,y),$$

где $\psi(x,y)$ - любая функция, допускающая вместе с $\varphi(x,y)$ обратное преобразование переменных. Тогда

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{12}\xi_y^2 = a_{11}\left(\xi_x + \frac{a_{12}}{a_{11}}\xi_y\right)^2 = 0,$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\left(\xi_x + \frac{a_{12}}{a_{11}}\xi_y\right)\left(\eta_x + \frac{a_{12}}{a_{11}}\eta_y\right) = 0,$$

т.к. $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$. После деления уравнения 6.4) на коэффициент при $u_{\xi\eta}$ получим каноническую форму для уравнения параболического типа

$$u_{\eta\eta} = \Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta),$$

где $\Phi = -\dfrac{F_{11}}{\bar{a}_{22}}.$

3. Для уравнения эллиптического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{12} < 0$ и правые части уравнения (6.8) комплексно сопряженные, поэтому общие интегралы этих уравнений будут также комплексно сопряженными

$$\varphi(x,y) = C,\qquad \bar{\varphi}(x,y) = C.$$

Чтобы не иметь дела с комплексными переменными и функциями, введем новые, уже вещественные, переменные α и β

$$\alpha = \frac{\varphi + \bar{\varphi}}{2},\qquad \beta = \frac{\varphi - \bar{\varphi}}{2i},$$

т.е. $\varphi = \alpha + i\beta,\ \bar{\varphi} = \alpha - i\beta.$ Таким образом,

$$0 = a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = a_{11}(\alpha_x + i\beta_x)^2 + 2a_{12}(\alpha_x + i\beta_x)(\alpha_y + i\beta_y) +$$
$$+ a_{22}(\alpha_y + i\beta_y)^2 = (a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2) - (a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2) +$$
$$+ 2i(a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + a_{22}\alpha_y\beta_y).$$

Отсюда следует (см. (6.5)), что $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22}$ и $\bar{a}_{12} = 0.$

Уравнение (6.4) после деления на коэффициент при $u_{\alpha\alpha}$ принимает вид

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha,\beta,u,u_\xi,u_\beta),$$

где $\Phi = -\dfrac{F_1}{\bar{a}_{11}}.$

Итак, в зависимости от знака выражения $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ (т.е. от типа уравнения) получаем следующие канонические формы уравнения (6.1):

1. Гиперболический тип: $u_{\xi\eta} = \Phi$ или $u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi.$
2. Параболический тип: $u_{\eta\eta} = \Phi.$
3. Эллиптический тип: $u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi.$

8. Канонические формы линейных уравнений с постоянными коэффициентами

Линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_1u_y + cu + f(x,y) = 0. \quad (8.1)$$

Решая уравнение (6.8) получаем характеристики, которые будут прямыми линиями

$$y = \lambda_1 x + C_1, \qquad y = \lambda_2 + C_2,$$

где λ_1 и λ_2 корни уравнения (его удобно в данном случае тоже называть характеристическим)

$$a_{11}\lambda^2 - 2a_{12}\lambda + a_{22} = 0. \quad (8.2)$$

Теперь с помощью соответствующего преобразования переменных, а именно:

1. Если λ_1 и λ_2 вещественные и различные (гиперболический тип)

$$\xi = y - \lambda_1 x, \quad \eta = y - \lambda_2 x \quad \text{или} \quad \xi = y - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}x, \quad \eta = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}x;$$

2. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ (параболический тип)

$$\xi = y - \lambda x, \quad \eta = x;$$

3. Если $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \quad (\beta \neq 0)$ (эллиптический тип)

$$\xi = y - \alpha x, \quad \eta = \beta x;$$

уравнение (8.1) приводится к одному из следующих видов:

1. $u_{\xi\eta} + \Phi = 0$ или $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \Phi = 0;$
2. $u_{\eta\eta} + \Phi = 0;$
3. $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \Phi = 0;$

здесь $\Phi = \beta_1 u_\xi + \beta_2 u_\eta + cu + f.$

Пример 8.1. Привести к каноническому виду уравнение

$$u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0. \quad (8.3)$$

Напишем характеристическое уравнение (8.2)

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Следовательно, $\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2$. Уравнение - гиперболического типа, поэтому делаем замену

$$\xi = y - x, \quad \eta = y - 2x \ \text{ или } \ \xi = y - \frac{3}{2}x, \quad \eta = x.$$

После замены переменных уравнение имеет вид $u_{\xi\eta} = 0$ или $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = 0.$

Заметим, что решение уравнения $u_{\xi\eta} = 0$ рассматривалось в примере 1.3. Тем самым мы можем выписать общее решение уравнения (8.3)

$$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta) = \varphi(y - x) + \psi(y - 2x).$$

Пример 8.2. Привести к каноническому виду уравнение

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 0. \quad (8.4)$$

Решая характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0,$$

получаем $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Следовательно, уравнение (8.4) параболического типа. Делаем замену $\xi = y - x, \eta = x$. Имеем

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\eta - u_\xi,$$
$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi,$$
$$u_{xx} = (u_\eta - u_\xi)_\xi \xi_x + (u_\eta - u_\xi)_\eta \eta_x = -(u_{\eta\xi} - u_{\xi\xi}) + (u_{\eta\eta} - u_{\xi\eta}) = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$
$$u_{yy} = (u_\xi)_\xi \xi_y + (u_\xi)_\eta \eta_y = u_{\xi\xi},$$
$$u_{xy} = (u_\eta - u_\xi)_\xi \xi_y + (u_\eta - u_\xi)_\eta \eta_y = u_{\xi\eta} - u_{\xi\xi}.$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (8.4) и приводя подобные члены, будем иметь

$$u_{\eta\eta} + u_\eta = 0.$$

Заметим, что мы получили уравнение, которое можно рассматривать и как обыкновенное дифференциальное уравнение, зависящее от параметра ξ. Решая его, получаем

$$u = C_1(\xi) + C_2(\xi)e^{-\eta} = C_1(y - x) + C_2(y - x)e^{-x}.$$

<u>Пример 8.3.</u> Привести к каноническому виду уравнение

$$u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy} + u_x + u_y = 0. \qquad (8.5)$$

Для корней характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

имеем $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$. Уравнение – эллиптического типа, поэтому делаем замену

$$\xi = x + y, \quad \eta = x.$$

Подставляя выражения

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta,$$
$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi,$$
$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$
$$u_{xy} = u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}, \quad u_{yy} = u_{\xi\xi},$$

в уравнение (8.5), получаем

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2u_\xi + u_\eta = 0. \qquad (8.6)$$

Для линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами возможны дальнейшие упрощения канонической формы уравнений. Введем для этого вместо u новую функцию ϑ:

$$u = e^{\lambda\xi + \mu\eta}\vartheta,$$

где λ и μ - некоторые постоянные. Тогда

$$u_\xi = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\vartheta_\xi + \lambda\vartheta),$$
$$u_\eta = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\vartheta_\eta + \mu\vartheta),$$
$$u_{\xi\xi} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\vartheta_{\xi\xi} + 2\lambda\vartheta_\xi + \lambda^2\vartheta), \qquad (8.7)$$
$$u_{\xi\eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\vartheta_{\xi\eta} + \lambda\vartheta_\eta + \mu\vartheta_\xi + \lambda\mu\vartheta),$$
$$u_{\eta\eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\vartheta_{\eta\eta} + 2\mu\vartheta_\eta + \mu^2\vartheta).$$

Подставляем эти выражения, например, в уравнение

$$u_{\xi\eta} + b_1 u_\xi + b_1 u_\eta + cu + f = 0$$

и сокращая затем на $e^{\lambda\xi+\mu\eta}$, получим

$$\vartheta_{\xi\eta} + (\mu + b_1)\vartheta_\xi + (\lambda + b_2)\vartheta_\eta + (\lambda\mu + b_1\lambda + b_2\mu + C)\vartheta + f_1 = 0.$$

Выберем параметры λ и μ так, чтобы коэффициенты при первых производных обратились в нуль $(\lambda = -b_2, \mu = -b_1)$.

В результате получим

$$\vartheta_{\xi\eta} + g\vartheta + f_1 = 0,$$

где $g = \lambda\mu + b_1\lambda + b_2\mu + c = c - b_1 b_2$, $f_1 = fe^{-(\lambda\xi+\mu\eta)}$.

Аналогично упрощения проводятся и для других канонических форм. Окончательно приходим к следующим каноническим формам для уравнений с постоянными коэффициентами:

1. Гиперболический тип
$$J_{xh} + gJ + f_1 = 0 \text{ или } J_{xx} - J_{hh} - gJ + f_1 = 0.$$
2. Параболический тип
$$J_{hh} + b_1 J_x + f_1 = 0.$$
3. Эллиптический тип
$$J_{xx} + J_{hh} + gJ + f_1 = 0.$$

Пример 8.4. Упростим уравнение (8.6), полученное в примере 8.3. Подставляя выражения для производных (8.7) и сокращая на e^{lx+mh} будем иметь
$$J_{xx} + J_{hh} + 2(l+1)J_x + (2m+1)J_h + (l^2 + m^2 - 2l + m)J = 0.$$

Выберем $l = -1,\quad m = -\dfrac{1}{2}.$ Тогда уравнение будет иметь вид
$$J_{xx} + J_{hh} - \frac{5}{4}J = 0.$$

СОДЕРЖАНИЕ