Н.Д.Выск, К.Ю. Осипенко

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

учебное пособие

МАТИ-РГТУ им. К.Э. Циолковского
Кафедра «Высшая математика»
2011

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Методические указания

Начинайте каждое занятие с изучения лекции. При этом:

- ✓ вначале внимательно прочтите определения и осознайте смысл используемых терминов
- ✓ затем прочтите формулировки теорем, которые задают свойства изучаемых объектов
- ✓ разберите доказательства теорем и выводы формул
- ✓ в завершение работы прочтите всю лекцию еще раз, чтобы убедиться, что теоретический материал освоен.

Следующий этап работы – выполнение заданий практикума.

- ✓ каждую задачу попробуйте решить самостоятельно
- ✓ в случае неудачи посмотрите указание и вновь повторите попытку
- ✓ в случае повторной неудачи внимательно разберите приведенное решение
- ✓ если вы решили задачу самостоятельно (во всяком случае, ваш ответ оказался верным), все равно обязательно прочтите решение, данное в учебном курсе – это поможет вам проверить правильность примененного метода решения
- ✓ закончив решение всех задач практикума, обязательно вернитесь к тем из них, которые не получились в первый раз, и попробуйте вновь самостоятельно решить их.

При выполнении домашнего задания используйте материал лекции и практикума.

1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1. МАТРИЦЫ

1.1.1. *Матрицы. Операции над матрицами*

Определение матрицы

1.

Матрицей A размера $m \times n$
называется таблица из $m \cdot n$ чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ ..... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix}$$

Часто для краткости пишут $A = \|a_{ij}\|$. Числа, из которых состоит матрица, называются *элементами матрицы*. Индексы у элементов матрицы указывают расположение этого элемента в таблице: первый индекс – номер строки, в которой находится элемент, а второй – номер столбца. Например, элемент a_{23} находится на пересечении второй строки и третьего столбца:

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\boxed{a_{23}}...a_{2n} \\ ..... \\ a_{m1}a_{m2}a_{m3}...a_{mn} \end{pmatrix}$$

Элементы a_{11}, a_{22}, a_{33}, … называются *главной диагональю* матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11}..... \\ .....a_{22}..... \\ .....a_{33}... \\ ..... \end{pmatrix}$$

Если матрица A имеет размер $n \times n$, то такую матрицу называют *квадратной матрицей порядка n*.

Две матрицы одинакового размера $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$ называют *равными* (при этом пишут $A = B$), если

$$a_{ij} = b_{ij}; i = 1,...,m; j = 1,...,n.$$

Упражнение 1.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 4 & -3\end{pmatrix}.$$

Найти a_{12} и a_{23}.

Решение.
Элемент a_{12} располагается в первой строке и втором столбце, то есть это второй элемент первой строки: $a_{12} = -1$.
Соответственно a_{23} – элемент, стоящий во второй строке и в третьем столбце; $a_{23} = -3$.

Упражнение 2.
Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}\alpha^2 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ \beta & 3\end{pmatrix}.$$

При каких α и β $A=B$?

Решение.
У равных матриц должны быть равными соответствующие элементы. Для элементов, заданных численно, это условие выполняется: $a_{12} = b_{12} = 1$, $a_{22} = b_{22} = 3$. Поскольку $b_{11} = 4$, а $a_{21} = -2$, для равенства матриц A и B должны выполняться условия:

$$\begin{cases}\alpha^2 = 4\\ \beta = -2\end{cases}.$$

Следовательно, $\alpha = \pm 2$, $\beta = -2$.

Ответ: $\alpha = \pm 2$, $\beta = -2$.

Сумма матриц

Суммой двух матриц одинакового размера $m\times n$ $A = ||a_{ij}||$ и $B = ||b_{ij}||$ называют матрицу $C = ||c_{ij}||$ размера $m\times n$ такую, что

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n.$$

Пример 1.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -3\\ 0 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow C=A+B=\begin{pmatrix}1-2 & 2+3\\ 3+1 & -1-3\\ 4+0 & 5+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 4 & -4\\ 4 & 7\end{pmatrix}.$$

Упражнение 3.

Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 5 & -4 & 7\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Найти $A+B$.

Решение.

По определению суммы матриц матрица $C = A + B$ имеет размер 2×3, и ее элементы являются суммами соответствующих элементов матриц A и B:

$c_{11}=a_{11}+b_{11}=1-3=-2;\ c_{12}=a_{12}+b_{12}=-3+2=-1;\ c_{13}=a_{13}+b_{13}=2+1=3;$

$c_{21}=a_{21}+b_{21}=5+4=9;\ c_{22}=a_{22}+b_{22}=-4+1=-3;\ c_{23}=a_{23}+b_{23}=7+2=9.$

Следовательно, матрица $C = A + B$ имеет вид:

$$C=A+B=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 3\\ 9 & -3 & 9\end{pmatrix}.$$

Ответ: $A+B=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 3\\ 9 & -3 & 9\end{pmatrix}$.

Не забывайте, что складывать можно только матрицы одинакового размера!

Нулевой матрицей называется матрица, все элементы которой равны нулю. Легко проверить, что выполнены следующие свойства для операции сложения матриц:

1. *$A+B=B+A$ (коммутативность),*
2. *$(A+B)+C=A+(B+C)$ (ассоциативность),*
3. *$A+0=A$.*

Произведением матрицы размера $m \times n$ $A = \|a_{ij}\|$ на число λ называют матрицу того же размера $C = \|c_{ij}\|$ такую, что

$$c_{ij} = \lambda a_{ij},\ i = 1,...,m;\ j = 1,...,n.$$

Упражнение 4.
Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу C= -3A.

Решение.
Из определения произведения матрицы на число следует, что размер матрицы C совпадает с размером матрицы A (2×3), а каждый элемент матрицы C равен соответствующему элементу матрицы A, умноженному на -3:

$$c_{11} = -3a_{11} = -3 \cdot 1 = -3;\ c_{12} = -3a_{12} = -3 \cdot 7 = 21;$$

$$c_{13} = -3a_{13} = -3 \cdot (-3) = 9;$$

$$c_{21} = -3a_{21} = -3 \cdot 2 = -6;\ c_{22} = -3a_{22} = -3 \cdot 4 = -12;$$

$$c_{23} = -3a_{23} = -3 \cdot 6 = -18.$$

Таким образом,

$$C = \begin{pmatrix} -3 & -21 & 9 \\ -6 & -12 & -18 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $C = \begin{pmatrix} -3 & -21 & 9 \\ -6 & -12 & -18 \end{pmatrix}$.

Нетрудно убедиться, что имеют место следующие свойства:

1. λ (A+B)= λA+λB,
2. (λ+μ)A=λA+μA,
3. ($\lambda\mu$)A=λ (μA).

Разностью матриц одинакового размера A и B называется матрица $A\text{-}B=A+(-1)B$.

Знак суммы

Нам часто придется иметь дело с различными суммами. Удобно иметь обозначение для сумм, позволяющее записывать их более коротким способом. Этому служит знак суммирования

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ .$$

Из хорошо известных свойств чисел вытекают следующие свойства знака суммирования:

1. $\sum_{j=1}^{n}(a_j + b_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j + \sum_{j=1}^{n} b_j$

2. $\sum_{j=1}^{n} \lambda a_j = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_j$

3. $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$

Произведение матриц

Умножение матрицы $A = \|a_{ij}\|$ размера $m \times n$ на матрицу $B = \|b_{ij}\|$ размера $l \times k$ определено лишь для случая, когда число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B, т.е. когда $n=l$. В этом случае произведение матриц определяется следующим образом:

Произведением матриц AB называется матрица $C = \|c_{ij}\|$ размера $m \times k$, у которой

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj},$$

$$i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n$$

Иначе говоря, элемент c_{ij} равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующий элемент j-ого столбца матрицы B. С помощью знака суммирования можно записать это так:

$$c_{ij} = \sum_{S=1}^{n} a_{is} b_{sj}, \quad i = 1,...,m;\ j = 1,...,k.$$

Пример 2.
Найти произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ и } \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$AB = \begin{pmatrix} 2\cdot 2+3\cdot 3 & 2\cdot(-3)+3\cdot 1 & 2\cdot 4+3\cdot 0 \\ -1\cdot 2+4\cdot 3 & -1(-3)+4\cdot 1 & -1\cdot 4+4\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -3 & 8 \\ 10 & 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что произведение матриц некоммутативно, т.е. в общем случае AB не равно BA. В приведённом выше примере матрицу B просто нельзя даже умножить на матрицу A. Но, даже если A и B – квадратные матрицы одного порядка (тогда существуют произведения AB и BA), то, как показывает следующий пример, произведения AB и BA могут не совпадать.

Пример 3.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$

Тогда $AB = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+1\cdot(-2) & 2\cdot 0+1\cdot 3 \\ 0\cdot 1+(-1)\cdot(-2) & 0\cdot 0+(-1)\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix},$

$$BA = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+0\cdot 0 & 1\cdot 1+0\cdot(-1) \\ -2\cdot 2+3\cdot 0 & -2\cdot 1+3\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Единичной матрицей называется квадратная матрица вида

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 5.
Доказать, что для любой квадратной матрицы A

$$AE = EA = A,$$

где E – единичная матрица того же порядка, что и A.

Доказательство.
Пусть A и E – квадратные матрицы n-го порядка, $B = AE$.

Тогда $b_{ij} = a_{i1}e_{1j} + a_{i2}e_{2j} + ... + a_{ij}e_{jj} + ... + a_{in}e_{nj}$.
Но $e_{ij} = 0$ при i, не равном j, а $e_{jj} = 1$. Следовательно, $b_{ij} = a_{ij} \cdot 1 = a_{ij}$. Таким образом, все элементы матрицы B равны соответствующим элементам матрицы A, то есть $B = A$.
Если матрица $C = EA$, то $c_{ij} = e_{i1}a_{1j} + e_{i2}a_{2j} + ... + e_{ii}a_{ij} + ... + e_{in}a_{nj} = 1 \cdot a_{ij} = a_{ij}$ (учитываем, что $e_{ii} = 1$, $e_{ij} = 0$ при i, не равном j). Значит, $C = A$. Утверждение доказано.

Приведём ряд свойств произведений матриц.

1. (AB)C=A(BC)

Доказательство.
Пусть размер матрицы $A = ||a_{ij}||$ $m \times p$, матрицы $B = ||b_{ij}||$ - $p \times n$, а матрицы $C = ||c_{ij}||$ $n \times k$. Имеем $AB = ||\alpha_{ij}||$, где

$$\alpha_{ij} = \sum_{s=1}^{p} a_{is}b_{sj}, \quad i = 1,...,m; j = 1,...,n.$$

Тогда $(AB)C = ||\gamma_{ij}||$, где

$$\gamma_{ij} = \sum_{r=1}^{p} \alpha_{ir}c_{rj} = \sum_{r=1}^{n}(\sum_{s=1}^{p} a_{is}b_{sr})c_{rj} = \sum_{s=1}^{p}\sum_{r=1}^{n} a_{is}b_{sr}c_{rj} = \sum_{s=1}^{p} a_{is}\beta_{sj},$$

где $\beta_{sj} = \sum_{r=1}^{n} b_{sr}c_{ri}$ - элемент матрицы BC. Тем самым, если обозначить элемент матрицы $A(BC)$ через γ'_{ij}, будем иметь

$$\gamma_{ij}' = \sum_{s=1}^{p} a_{is}\beta_{sj} = \gamma_{ij}, \quad m.e. \quad (AB)C = A(BC).$$

2. A(B+C)=AB+AC,
(B+C)A=BA+CA

Доказательство.
Пусть матрица $A = ||a_{ij}||$ имеет размер $m \times p$, а матрицы $B = ||b_{ij}||$ и $C = ||c_{ij}||$ имеют размер $p \times n$. Тогда для элементов матрицы $A(B+C) = ||\gamma_{ij}||$ имеем

$$\gamma_{ij} = \sum_{s=1}^{p} a_{is}(b_{si} + c_{sj}) = \sum_{s=1}^{p} a_{is}b_{sj} + \sum_{s=1}^{p} a_{is}c_{sj} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}.$$

Из определения произведения матриц вытекает, что $AB = \|\alpha_{ij}\|$, а $AC = \|\beta_{ij}\|$, т.е. $A(B+C)=AB+AC$. Аналогично доказываем, что $(B+C)A=BA+CA$.

Упражнение 1.6.
Пусть A и B – квадратные матрицы одного порядка. Вывести формулу для $(A+B)^2$ (при натуральном n под C^n понимается произведение $C \cdot C \cdot \ldots \cdot C$).

Решение.
Используем свойства сложения и умножения матриц:
$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = (A + B)A + (A + B)B = A \cdot A + B \cdot A + A \cdot B + B \cdot B =$
$= A^2 + B \cdot A + A \cdot B + B^2$.

Заметьте, что результат может совпасть с формулой сокращенного умножения
$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
только в том случае, если $AB = BA$.
В общем случае это неверно!

Ответ: $(A + B)^2 = A^2 + B \cdot A + A \cdot B + B^2$.

Упражнение7.
Пусть A и B – квадратные матрицы одного порядка. Разложить на множители выражение $AB+2B$.

Решение.
Используем свойство единичной матрицы (см. упражнение 5):

$$AE = EA = A.$$

Следовательно, $B = EB$. Тогда $AB + 2B = AB + (2E)B = (A + 2E)B$ (использовано свойство 2 произведения матриц).

Ответ: $AB + 2B = (A + 2E)B$.

Упражнение 8.
Пусть A,B и C – квадратные матрицы одного порядка. Разложить на множители выражение $A^2C + AC^2$.

Решение.

Поскольку $A^2 = A \cdot A$, $C^2 = C \cdot C$, запишем заданный матричный многочлен в виде: $A^2C + AC^2 = A \cdot A \cdot C + A \cdot C \cdot C$ и воспользуемся свойствами произведения матриц:

$$A \cdot A \cdot C + A \cdot C \cdot C = A(A \cdot C + C \cdot C) = A((A + C)C) = A(A + C)C.$$

Ответ: $A^2C + AC^2 = A(A + C)C$.

Упражнение 9.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти AB и BA.

Решение.

Определим размеры матрицы A: 4×1 и B: 1×4. Следовательно, существуют оба произведения: и AB, и BA, причем размер матрицы $C = AB$: 4×4, а матрицы $D = BA$: 1×1.

Вычислим элементы матрицы C:

$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} = 1 \cdot 3 = 3$; $c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} = 1 \cdot 0 = 0$; $c_{13} = a_{11} \cdot b_{13} = 1 \cdot 2 = 2$;

$c_{14} = a_{11} \cdot b_{14} = 1 \cdot (-1) = -1$;

$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} = -2 \cdot 3 = -6$; $c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} = -2 \cdot 0 = 0$; $c_{23} = a_{21} \cdot b_{13} = -2 \cdot 2 = -4$;

$c_{24} = a_{21} \cdot b_{14} = -2 \cdot (-1) = 2$;

$c_{31} = a_{31} \cdot b_{11} = 3 \cdot 3 = 9$; $c_{32} = a_{31} \cdot b_{12} = 3 \cdot 0 = 0$; $c_{33} = a_{31} \cdot b_{13} = 3 \cdot 2 = 6$;

$c_{34} = a_{31} \cdot b_{14} = 3 \cdot (-1) = -3$;

$c_{41} = a_{41} \cdot b_{11} = 4 \cdot 3 = 12$; $c_{42} = a_{41} \cdot b_{12} = 4 \cdot 0 = 0$; $c_{43} = a_{41} \cdot b_{13} = 4 \cdot 2 = 8$;

$c_{44} = a_{41} \cdot b_{14} = 4 \cdot (-1) = -4$.

Таким образом, матрица C имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ -6 & 0 & -4 & 2 \\ 9 & 0 & 6 & -3 \\ 12 & 0 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Матрица D состоит из единственного элемента:

$d_{11} = b_{11} \cdot a_{11} + b_{12} \cdot a_{21} + b_{13} \cdot a_{31} + b_{14} \cdot a_{41} = 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = 5.$

Тогда $D =$ (5).

Ответ: $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ -6 & 0 & -4 & 2 \\ 9 & 0 & 6 & -3 \\ 12 & 0 & 8 & -4 \end{pmatrix}$, $D =$ [illegible].

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «*Операции над матрицами*»

Задача 1.

Найти матрицу 5A – 2B, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Указание

Используя операции умножения матрицы на число и сложения матриц, найдите сначала матрицы $5A$ и $-2B$, а затем их сумму.

Решение

Используем определения линейных операций над матрицами:

$$5A = \begin{pmatrix} 10 & -15 & 5 \\ -5 & 0 & -10 \end{pmatrix}, \; 2B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ -6 & 2 & -8 \end{pmatrix}, \; 5A - 2B = \begin{pmatrix} 10-8 & -15-6 & 5-4 \\ -5+6 & 0-2 & -10+8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -21 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $5A - 2B = \begin{pmatrix} 2 & -21 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Задача 2.

Найти x, y и m, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}, A + mB = \begin{pmatrix} -5 & 21 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Указание

Используя операции умножения матрицы на число и сложения матриц, найдите элементы матрицы $A + mB$, а затем приравняйте их соответствующим элементам матрицы $\begin{pmatrix} -5 & 21 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение

Если

$$A + mB = \begin{pmatrix} -5 & 21 \\ 8 & -1 \end{pmatrix},$$

$$то \quad \begin{cases} 1 - 2m = -5 \\ 6 + mx = 21 \\ -1 + my = 8 \\ 2 - m = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ 6 + 3x = 21 \\ -1 + 3y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ x = 5 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Ответ: $x = 5$, $y = 3$, $m = 3$.

Задача 3.
Найти AB и BA, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Указание

Проверьте возможность перемножения матриц, определив их размерность, а затем используйте определение произведения матриц.

Решение

Проверим возможность перемножения матриц, определив их размерность. $A[2 \times 4]$, $B[4 \times 2]$. Следовательно, $n = l = 4$, $m = k = 2$, поэтому матрицы AB и BA существуют, причем $AB[2 \times 2]$, $BA[4 \times 4]$.
Для вычисления элементов матрицы $C = AB$ элементы строк матрицы A умножаются на соответствующие элементы столбцов матрицы B:

$$c_{11} = 2 \cdot 2 + (-2)(-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 9$$

(сумма произведений элементов первой строки A на элементы первого столбца B; первый индекс вычисляемого элемента задает номер строки A, второй индекс – номер столбца B);

$$c_{12} = 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 = 5;$$
$$c_{21} = -3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 = -9;$$
$$c_{22} = -3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + (-1_ \cdot 1 + 1 \cdot 4 = -3.$$

Следовательно,

$$C = AB = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}.$$

При вычислении элементов матрицы $D = BA$ элементы строк B умножаются на элементы столбцов A:

$d_{11} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 0$; $d_{12} = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = -4$; $d_{13} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 1$;
$d_{14} = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$; $d_{21} = -1 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) = -2$; $d_{22} = -1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 = 2$;
$d_{23} = -1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = -1$; $d_{24} = -1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$; $d_{31} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) = -1$;
$d_{32} = 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = -1$; $d_{33} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$; $d_{34} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$;

$d_{41} = 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) = -8$; $d_{42} = 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 = 0$; $d_{43} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = -2$;
$d_{44} = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 4$.

Таким образом,

$$D = BA = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $AB = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Задача 4.

Выяснить, можно ли умножить друг на друга матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad и \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Если произведение существует, вычислить его.

Указание

Проверьте возможность перемножения матриц, определив их размерность, а затем (в случае, если произведение AB или BA существует) найдите его, используя определение произведения матриц.

Решение

Сравним размерности матриц A и B: $A[3 \times 2]$, $B[2 \times 2]$. Следовательно, $n = l,\ m \neq k,$ поэтому произведение $AB[3 \times 2]$ существует, а произведение BA – нет.

Найдем элементы AB:

$(ab)_{11} = 0 \cdot 5 + 3 \cdot 7 = 21$; $(ab)_{12} = 0 \cdot 6 + 3 \cdot 8 = 24$; $(ab)_{21} = 4 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 6$;
$(ab)_{22} = 4 \cdot 6 - 2 \cdot 8 = 8$; $(ab)_{31} = 1 \cdot 5 - 1 \cdot 7 = -2$; $(ab)_{32} = 1 \cdot 6 - 1 \cdot 8 = -2$.

Ответ: $AB = \begin{pmatrix} 21 & 24 \\ 6 & 8 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, BA не существует.

Задача 5.

Вычислить матричный многочлен $A^2 - 3A$, где

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Указание

Найдите произведение AA и матрицу -3A, а затем сложите полученные матрицы.

Решение

Поскольку $A^2 = A \cdot A$, умножим матрицу A на себя по правилу умножения матриц. A – квадратная матрица 2-го порядка, поэтому A^2 – тоже квадратная матрица той же размерности.

Найдем элементы матрицы $C = A^2$:

$$c_{11} = -2\cdot(-2) + 1 \cdot 0 = 4;$$
$$c_{12} = -2\cdot 1 + 1 \cdot 3 = 1;$$
$$c_{21} = 0\cdot(-2) + 3 \cdot 0 = 0;$$
$$c_{22} = 0\cdot 1 + 3 \cdot 3 = 9.$$

Итак,

$$C = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Теперь вычислим элементы матрицы D = -3A. Для этого все элементы матрицы A умножим на -3:

$$D = -3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$A^2 - 3A = C + D = \begin{pmatrix} 4+6 & 1-3 \\ 0+0 & 9-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}..$$

Ответ: $A^2 - 3A = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Задача 6.

Найти матрицу X из уравнения $X^2 = A$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Указание

Из определения операции умножения матриц следует, что X – квадратная матрица 2-го порядка.

Пусть

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

тогда, приравнивая элементы произведения $X\cdot X$ соответствующим элементам A, получим систему уравнений для определения элементов матрицы X.

Решение

Из определения операции умножения матриц следует, что X – квадратная матрица 2-го порядка.

Пусть

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

тогда, приравнивая элементы произведения $X \cdot X$ соответствующим элементам A, получим систему уравнений

$$\begin{cases} a^2 + bc = 3 \\ ab + bd = 2 \\ ac + cd = -2 \\ bc + d^2 = -1 \end{cases}.$$

Разделив левую и правую части второго уравнения на соответствующие части третьего, получим, что $\frac{b}{c} = -1,$ откуда $b = -c$. Подставим это выражение для b в систему:

$$\begin{cases} a^2 - c^2 = 3 \\ ac + cd = -2. \\ c^2 - d^2 = 1 \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что

$$a + d = -\frac{2}{c}.$$

Складывая первое и третье уравнения, найдем, что

$$a^2 - d^2 = 4 \Rightarrow (a+d)(a-d) = 4.$$

Используя предыдущий результат, получим, что

$$a - d = 4 : \left(-\frac{2}{c} \right) = -2c.$$

Тогда

$$\begin{cases} a + d = -\frac{2}{c} \\ a - d = -2c \end{cases}, \quad \textit{откуда} \quad a = -c - \frac{1}{c}, d = c - \frac{1}{c}.$$

Подставим найденное выражение для d в последнее уравнение:

$$c^2 - \left(c - \frac{1}{c} \right)^2 = 1, c^2 - c^2 + 2 - \frac{1}{c^2} = 1, \frac{1}{c^2} = 1, c = \pm 1.$$

Вычислим остальные элементы матрицы X:

1) если $c = 1$, то $a = -2$, $b = -1$, $d = 0$;
2) если $c = -1$, то $a = 2$, $b = 1$, $d = 0$.

Ответ: $X_1 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.1.2. *Определители матриц*

Определители 2-го и 3-го порядков

Каждой квадратной матрице можно сопоставить некоторое число, называемое *определителем* матрицы и обозначаемое через $|A|$. Прежде чем дать общее определение этого понятия, определим его для матриц 2-го и 3-го порядков.

Определителем матрицы 2-го порядка называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Пример 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-5) - (-3)\cdot 2 = 1.$$

Упражнение 1. Найти определители

$$\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -8 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1) - 2\cdot(-8) = -3 + 16 = 13;$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 1 - 2\cdot(-4) = 3 + 8 = 11;$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = 6\cdot 4 - 3\cdot(-8) = 24 + 24 = 48.$$

Определителем матрицы 3-го порядка называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Пример 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

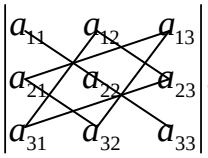
$$= 1 \cdot (-4) - 2 \cdot 11 - 1 \cdot (-6) = -20.$$

При раскрытии определителей 2-го порядка выражение для определителя 3-го порядка может быть записано в общем случае в виде

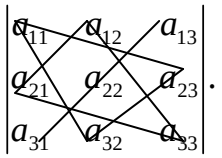
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

Для вычисления определителя по этой формуле существует следующая геометрическая схема, называемая «правилом треугольников». Первые три слагаемых находятся перемножением элементов, стоящих на главной диагонали, и элементов, стоящих в вершинах треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали:



Остальные три слагаемых (с минусами) получаются по аналогичной схеме:



Упражнение 2. Найти определители

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-19) = 20;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-4) + 1 \cdot (-2) = -16;$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-1) + 1 \cdot (-7) + 2 \cdot (-7) = -24.$$

Определитель *n*-го порядка

Пусть дана квадратная матрица A. *Минором* M_{ij} называется определитель матрицы, получаемой из матрицы A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Пример 3. Если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix},$$

то $M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -5$, $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 10.$

Упражнение 3. Найти M_{32} и M_{31} для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 7 & 6 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Минор M_{32} получаем, вычеркнув из матрицы A 3-ю строку и 2-ой столбец:

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 2 = -7.$$

Для вычисления минора M_{31} вычеркиваем из матрицы A 3-ю строку и 1-ый столбец:

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-3) - 2 \cdot 2 = 5.$$

Общее понятие определителя дадим с помощью рекуррентной схемы, а именно, считая, что понятие определителя известно для матриц n–1-го порядка, дадим его для матриц n-го порядка (фактически так и вводилось понятие определителя для матриц 3-го порядка).

Определителем матрицы $A = \|a_{ij}\|$ *порядка* n называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} - \dots + (-1)^{n+1}M_{1n}.$$

Используя знак суммы, это определение можно записать в виде:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} M_{1j}.$$

Пример 4.

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} -$$

$$-2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-4) - 2 \cdot (-32) = 52.$$

Упражнение 4. Вычислить

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (1 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 1 \cdot (-1)) - 2 \cdot (3 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-2)) = 3.$$

Свойства определителей

1. *Для любой квадратной матрицы порядка n*

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1}.$$

Тем самым определитель может быть вычислен не только с помощью разложения по первой строке (как в исходном определении), но и с помощью разложения по первому столбцу.

Доказательство

Для матриц второго порядка это свойство легко проверяется. Допустим, что доказываемое свойство имеет место для матриц порядка $n - 1$. Докажем, что оно выполняется для матриц порядка n. В силу определения имеем:

$$|A| = a_{11} M_{11} + \sum_{j=2}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} M_{1j}. \qquad (1)$$

Пользуясь предположением индукции, вычислим M_{1j}, $2 \le j \le n$, с помощью разложения по первому столбцу. Тогда

$$M_{1j} = \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i} a_{i1} (M_{1j})_{i1},$$

где $(M_{1j})_{i1}$ – определитель, получаемый из матрицы A вычеркиванием 1-ой строки и j-го столбца, а также i-й строки и 1-го столбца. Подставляя это выражение в (1), получаем:

$$|A| = a_{11} M_{11} + \sum_{j=2}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i} a_{i1} (M_{1j})_{i1} = a_{11} M_{11} + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \sum_{j=2}^{n} (-1)^{j} a_{1j} (M_{1j})_{i1}.$$

В силу того, что

$$\sum_{j=2}^{n} (-1)^{j} a_{1j} (M_{1j})_{i1} = \sum_{j=2}^{n} (-1)^{j} a_{1j} (M_{i1})_{1j} = M_{i1},$$

имеем:

$$|A| = a_{11} M_{11} + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1}.$$

Треугольной матрицей называется матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Упражнение 5.

Вычислим определитель треугольной матрицы, разлагая его по первому столбцу. В силу того, что в первом столбце только один элемент отличен от нуля, имеем:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Продолжая этот процесс, получим:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Таким образом, *определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.*

Матрицей, *транспонированной* к матрице $A = ||a_{ij}||$ размера $m \times n$, называется матрица $A^T = ||b_{ij}||$ размера $n \times m$, где $b_{ij} = a_{ji}$. Иными словами, чтобы из исходной матрицы получить транспонированную, надо ее строки поставить в соответствующие столбцы.

Пример 5. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 6. Для

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

найти A^T и $(A^2)^T$.

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицу A^T получим из матрицы A следующим образом: элементы 1-ой строки матрицы A образуют 1-ый столбец матрицы A^T, элементы 2-ой строки A – 2-ой столбец A^T, элементы 3-ей строки A – 3-ий столбец A^T:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ -2 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу A^2:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 20 & 19 \\ 45 & 30 & 27 \\ -1 & 4 & -13 \end{pmatrix}.$$

Тогда $(A^2)^T = \begin{pmatrix} 7 & 45 & -1 \\ 20 & 30 & 4 \\ 19 & 27 & -13 \end{pmatrix}$.

2. *Для любой квадратной матрицы A* $|A| = |A^T|$.

Доказательство.
Для матриц второго порядка это свойство легко проверяется. Допустим, что доказываемое свойство имеет место для матриц порядка $n - 1$. Докажем, что оно выполняется для матриц порядка n. Разложим определитель матрицы A^T по первому столбцу:

$$| A^T | = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{1i} M_{1i}^*,$$

где M_{1i}^* - определитель, получаемый из матрицы A^T вычеркиванием i-ой строки и 1-го столбца. В силу предположения индукции $M_{1i}^* = M_{1i}$. Тем самым $| A^T | = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{1i} M_{1i} = | A |$.

Из свойства 2 вытекает равноправность строк и столбцов, т.е. если какое-либо утверждение об определителе доказано относительно строк, то оно верно и относительно столбцов. Далее в силу сказанного все свойства будут доказываться лишь для строк.

3. *Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель изменит знак, а модуль его значения не изменится.*

Доказательство.
Докажем сначала это свойство для двух соседних строк. Снова воспользуемся методом полной индукции. Для матрицы 2-го порядка это свойство легко проверяется. Предположим, что перестановка двух соседних строк меняет знак определителя порядка $n - 1$. Пусть в матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{an} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

переставляются строки с номерами k и $k + 1$. Матрицу с переставленными строками обозначим через

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{an} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,n} \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Напишем разложение определителей этих двух матриц по первому столбцу:

$$|A| = (-1)^{k+1} a_{k1} M_{k1} + (-1)^{k+2} a_{k+1,1} M_{k+1,1} + \sum_{i \neq k,k+1} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1},$$

$$|B| = (-1)^{k+1} a_{k+1,1} N_{k1} + (-1)^{k+2} a_{k1} N_{k+1,1} + \sum_{i \neq k,k+1} (-1)^{i+1} a_{i1} N_{i1}.$$

При $i \neq k,k + 1$ в силу предположения индукции $N_{i1} = - M_{i1}$. Остается заметить, что $N_{k1} = M_{k+1,1}$, а $N_{k+1,1} = M_{k1}$. Тогда

$$|B| = (-1)^{k+1} a_{k+1,1} M_{k+1,1} + (-1)^{k+2} a_{k1} M_{k1} - \sum_{i \neq k,k+1} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} = -|A|.$$

Пусть теперь в матрице переставляются строки с номерами i и j, $i < j$. Перестановку этих строк можно осуществить, переставляя только соседние строки, следующим образом. Сначала j-я строка последовательно переставляется с $j – i$ строками, стоящими над ней, а затем i-я строка последовательно переставляется с $j – i$ - 1 строками, стоящими под ней. Всего будет переставлено $2(j – i) – 1$ соседних строк. Поэтому определитель нечетное число раз будет менять знак и в результате поменяет знак.

Следствие 2.1. *Если у квадратной матрицы A имеются две одинаковые строки (столбца), то* $|A| = 0$.

Доказательство.
Пусть у матрицы A имеются две одинаковые строки. Поменяв их местами, получим ту же самую матрицу, но по свойству 3 ее определитель должен поменять знак, т.е. получаем, что $|A| = - |A|$, что возможно только при $|A| = 0$.

4. *Определитель матрицы может быть разложен по любой строке или столбцу, то есть имеют место равенства*

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj}, \qquad (3)$$

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{ik} M_{ik}. \qquad (4)$$

Доказательство.
Как уже отмечалось, в силу равноправности строк и столбцов достаточно доказать разложимость по любой строке. Положим

$$B = \begin{pmatrix} a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрицу B можно получить из матрицы A, последовательно меняя k-ю строку со строками, находящимися над ней. Поскольку таких перестановок будет $k - 1$ (столько строк лежит выше k-ой строки), то по свойству 3

$$|A| = (-1)^{k-1} |B|.$$

Вычислим теперь определитель матрицы B с помощью разложения по первой строке:

$$|B| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{kj} N_{1j}.$$

Нетрудно убедиться, что $N_{1j} = M_{kj}$, $j = 1, \dots, n$. Поэтому

$$|A| = (-1)^{k-1} |B| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj}.$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется величина

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Равенства в свойстве 4 могут быть записаны через алгебраические дополнения:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{kj},$$
$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik}. \qquad (5)$$

Пример 6. Вычислим определитель из примера 4, разлагая его по третьему столбцу (в нем больше всего нулей):

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 9 \\ 7 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 7 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \left(3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} \right) = -12 + 64 = 52.$$

Упражнение 7. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Наиболее удобно вычислять этот определитель разложением по 3-му столбцу (при этом потребуется вычислить только один определитель 3-го порядка):

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \left(2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = 3(2 \cdot 5 + 3 \cdot (-2)) = 12.$$

Линейной комбинацией матриц $A_1, \ldots, A_m$ одинакового размера называется матрица $A = \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_m A_m$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ – некоторые числа. В случае, если матрицы $A_1, \ldots, A_m$ имеют размеры $1 \times n$, говорят о линейной комбинации строк, а если размеры этих матриц $n \times 1$, то говорят о линейной комбинации столбцов.

5. *Если у квадратной матрицы A i-я строка (столбец) есть линейная комбинация строк (столбцов) A_i' и A_i'', т.е. имеет вид $\lambda_1 A_i' + \lambda_2 A_i''$, то*

$$|A| = \lambda_1 |A'| + \lambda_2 |A''|,$$

где A' и A'' - матрицы, у которых i-е строки (столбцы) заменены на A_i' и A_i'' соответственно.

Доказательство.
Пусть

$$A_i' = (a_{i1}', ..., a_{in}'),\ \ A_i'' = (a_{i1}'', ..., a_{in}'').$$

Тогда, разлагая определитель матрицы A по i-ой строке, будем иметь:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 a_{i1}' + \lambda_2 a_{i1}'' & \dots & \lambda_1 a_{in}' + \lambda_2 a_{in}'' \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (\lambda_1 a_{ij}' + \lambda_2 a_{ij}'') A_{ij} = \lambda_1 \sum_{j=1}^{n} a_{ij}' A_{ij} + \lambda_2 \sum_{j=1}^{n} a_{ij}'' A_{ij} = \lambda_1 |A'| + \lambda_2 |A''|.$$

Положив в этом свойстве $\lambda_2 = 0$, получаем

Следствие 2.2. *При умножении строки (столбца) квадратной матрицы на число ее определитель умножается на это число.*

Упражнение 8. Пусть A – квадратная матрица порядка n с определителем $|A|$, а λ – число. Найти $|\lambda A|$.

Решение.

Если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, *то* $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$.

Поэтому, используя следствие 2.2, можно сказать, что определитель $|\lambda A|$ получается из определителя $|A|$ при умножении *каждой* из n строк матрицы на число λ, следовательно, $|\lambda A| = \lambda^n |A|$.

Умножив строку (столбец) на $\lambda = 0$, из следствия 2.2 получаем

Следствие 2.3. *Если в квадратной матрице A имеется строка (столбец) с нулевыми элементами, то* $|A| = 0$.

6. *Определитель не изменится, если к любой строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на произвольное число.*

Доказательство.
Предположим, что к i-ой строке матрицы $A = \|a_{ij}\|$ прибавлена k-ая строка, умноженная на число λ. Тогда по свойству 5, следствию 2.2 и следствию 2.1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+\lambda a_{k1} & \dots & a_{in}+\lambda a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Пример 7. Вычислим определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

с помощью свойства 6. Вычтем из третьего столбца первый, а к четвертому столбцу прибавим первый, умноженный на 2. После этого разложим полученный определитель по второй строке. Имеем:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}.$$

В определителе третьего порядка вынесем множитель 2 из второго столбца:

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 2 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Теперь прибавим ко второй строке первую, умноженную на 2, и вычтем из третьей строки первую:

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 8 & 0 & 25 \\ -2 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 25 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} = -2(-88+50) = 76.$$

Упражнение 9. Вычислить определитель матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -4 \end{pmatrix},$$

пользуясь свойствами определителей.

Решение.

Приведем определитель матрицы A к треугольному виду. Для этого поменяем в нем местами 1-ую и 2-ую строки (при этом по свойству 3 определитель поменяет знак), а затем 1-ый и 2-ой столбец (определитель вновь поменяет знак, то есть окажется равным $|A|$). Получим:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 6 \\ 2 & 7 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Теперь вычтем из 2-ой строки 1-ую, умноженную на 2 (по свойству 6 определитель при этом не изменится):

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 5 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Преобразуем определитель так, чтобы элемент a_{42} стал равным нулю. Для этого умножим 4-ю строку на 5 (тем самым по следствию 2.2 весь определитель умножится на 5) и вычтем из нее 2-ую строку, умноженную на 2:

$$|A|=\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 5 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -13 & 34 \end{vmatrix}.$$

И наконец, прибавим к 4-ой строке 3-ю, умноженную на 13 (напомним еще раз свойство 6: такое преобразование не меняет значения определителя):

$$|A|=\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 5 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \end{vmatrix}=\frac{1}{5}\cdot 1\cdot 5\cdot 1\cdot 60=60$$

(при вычислении определителя треугольной матрицы использован результат, полученный в упражнении 2.5). Итак, $|A| = 60$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «*Определители*»

Задача 1.
Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Указание

Воспользуйтесь либо правилом треугольников, либо разложением определителя по 2-й строке или 2-му столбцу, содержащим нулевой элемент.

Решение

1-й способ (правило треугольников).
Вычислим определитель 3-го порядка, используя его определение:
$\Delta = 2\cdot0\cdot(-1) + (-3)\cdot(-4)\cdot2 + 5\cdot1\cdot1 - 2\cdot0\cdot5 - 1\cdot(-4)\cdot2 - (-1)\cdot1\cdot(-3) =$
$= 0 + 24 + 5 - 0 + 8 - 3 = 34.$

2-й способ (разложение по строке).
Применим свойство определителя:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} .$$

Для удобства вычисления выберем 2-ю строку, содержащую нулевой элемент ($a_{22} = 0$), поскольку при этом нет необходимости находить A_{22}, так как произведение $a_{22} A_{22} = 0$. Итак,

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1\cdot(-3\cdot(-1) - 5\cdot1) = 2;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1\cdot(2\cdot1 - (-3)\cdot2) = -8$$

(напомним, что определитель второго порядка, входящий в алгебраическое дополнение A_{ij}, получается вычеркиванием из исходного определителя i-й строки и j-го столбца).
Тогда $\Delta = a_{21} A_{21} + a_{23} A_{23} = 1\cdot2 + (-4)(-8) = 34.$

Ответ: $\Delta = 34$.

Задача 2.
Используя свойства определителя, вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}.$$

Указание

Вычитая из 2-й и 3-й строк определителя соответствующие элементы 1-й строки, добьемся того, что в 1-м столбце останется только один ненулевой элемент. Далее можно разложить определитель по 1-му столбцу.

Решение

Поскольку все элементы первого столбца равны 1, вычтем из 2-й и 3-й строк определителя соответствующие элементы 1-й строки (при этом величина определителя не изменится – свойство 6):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 0 & 2 & 24 \\ 0 & 3 & 39 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что теперь все элементы 2-й строки кратны двум, а элементы 3-й строки кратны трем. По следствию 2.2 соответствующие множители можно вынести за знак определителя:

$$\Delta = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 13 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов 3-й строки полученного определителя соответствующие элементы 2-й строки:

$$\Delta = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

и разложим определитель по 1-му столбцу:

$$\Delta = 6 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 12) = 6 \cdot 1 \cdot 1 = 6.$$

Ответ: $\Delta = 6$.

Разумеется, можно было вычислять этот определитель непосредственно (например, по правилу треугольников), но использование свойств определителей позволило существенно сократить и упростить численные расчеты.

Задача 3.

Используя свойства определителей, вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 23 & 48 & -52 \\ -24 & -50 & 50 \\ 46 & 99 & -98 \end{vmatrix}.$$

Указание

Прибавьте к элементам 2-й строки соответствующие элементы 1-й строки, а из элементов 3-й строки вычтите удвоенные элементы 1-й строки. Затем вынесите за знак определителя все общие множители элементов какой-либо строки или столбца.

Решение

Прибавим к элементам 2-й строки соответствующие элементы 1-й строки, а из элементов 3-й строки вычтем удвоенные элементы 1-й строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 23 & 48 & -52 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

Вынесем за знак определителя множитель -1 из 2-й строки и 3 – из 3-й:

$$\Delta = -3 \cdot \begin{vmatrix} 23 & 48 & -52 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Теперь из 3-го столбца вынесем множитель -2:

$$\Delta = -6 \cdot \begin{vmatrix} 23 & 48 & -26 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов 2-го столбца элементы 3-го столбца и разложим полученный определитель по 3-й строке:

$$\Delta = -6 \cdot \begin{vmatrix} 23 & 74 & -26 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 23 & 74 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \cdot (23 - 74) = 6 \cdot 51 = 306.$$

Ответ: $\Delta = 306$.

Задача 4.

Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 5 & 3 & x \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 40.$$

Указание

Разложив определитель, стоящий в левой части равенства, по первой строке, и приравняв его 40, вы получите квадратное уравнение для x.

Решение

Разложим определитель, стоящий в левой части равенства, по первой строке. Предварительно найдем соответствующие алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & x \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (9 - 4x) = 9 - 4x;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & x \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (15 - x) = x - 15;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (20 - 3) = 17.$$

Тогда

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 5 & 3 & x \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = x \cdot (9 - 4x) + 1 \cdot (x - 15) + 3 \cdot 17 = -4x^2 + 10x + 36,$$

и требуется решить квадратное уравнение

$$-4x^2 + 10x + 36 = 40,\ 2x^2 - 5x + 2 = 0,\ x_1 = 2,\ x_2 = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $x = 2,\ x = \frac{1}{2}.$

Задача 5.

Решить неравенство

$$\begin{vmatrix} 3 & x & 1 \\ x & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} > -3.$$

Указание

Раскройте определитель, стоящий в левой части неравенства, по 1-й строке.

Решение

Раскроем определитель, стоящий в левой части неравенства, по 1-й строке:

$$3(10 - 12) - x(2x - 9) + 4x - 15 > -3;$$

$$-2x^2 + 13x - 18 > 0;$$

$$2x^2 - 13x + 18 < 0;$$

$$2 < x < 4{,}5.$$

Ответ: (2; 4,5).

Задача 6.

Используя свойства определителей (не раскрывая определитель), вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}.$$

Указание

Используйте тригонометрическую формулу $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ и свойство определителя с двумя равными столбцами.

Решение

Из тригонометрии известно, что $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$. Вычтем из элементов 2-го столбца определителя соответствующие элементы 1-го столбца:

$$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta - \sin^2\alpha & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma - \sin^2\alpha & \cos 2\gamma \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos 2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos 2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos 2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}.$$

У полученного определителя, равного исходному (свойство 6), два столбца одинаковы, поэтому он равен нулю (следствие 2.1).

Ответ: 0.

Задача 7.

Вычислить определитель 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Указание

Преобразуйте определитель так, чтобы три из четырех элементов какой-либо строки или столбца стали равными нулю. Для этого воспользуйтесь свойством 6.

Решение

Преобразуем определитель так, чтобы три из четырех элементов какой-либо строки или столбца стали равными нулю. Для этого воспользуемся свойством

6. Его особенно удобно применять, если в определителе существует элемент, равный ± 1. Выберем в качестве такого элемента $a_{13} = 1$ и с его помощью обратим все остальные элементы 3-го столбца в нуль. С этой целью:

а) к элементам 2-й строки прибавим соответствующие элементы 1-й строки;

б) из элементов 3-й строки вычтем элементы 1-й строки, умноженные на 2;

в) из элементов 4-й строки вычтем элементы 1-й строки

(напомним, что при этом величина определителя не изменится). Тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по 3-му столбцу:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов 1-й строки нового определителя удвоенные элементы 2-й строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

и разложим этот определитель по 1-й строке:

$$\Delta = -3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 \cdot (0 - 3 \cdot (-1)) = -9.$$

Ответ: $\Delta = -9$.

Задача 8.

Вычислить определитель 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 28 & 1 & 0 & 0 \\ -67 & 83 & 2 & 0 \\ 19 & 47 & -35 & -4 \end{vmatrix}.$$

Указание

Разложите определитель по 1-й строке, а затем полученный определитель 3-го порядка вновь разложите по 1-й строке.

Решение

Разложим определитель по 1-й строке:

$$\Delta = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 83 & 2 & 0 \\ 47 & -35 & -4 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель 3-го порядка вновь разложим по 1-й строке:

$$\Delta = -3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -35 & -4 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-8 - 0) = 24.$$

Ответ: $\Delta = 24$.

Обратите внимание: если в определителе все элементы, стоящие по одну сторону от главной диагонали, равны нулю, то определитель равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

Ответ: $\Delta = 24$.

1.1.3. *Определитель произведения матриц. Обратная матрица*

Полураспавшиеся матрицы

Квадратная матрица называется *полураспавшейся*, если ее можно представить в виде

$$A = \begin{pmatrix} B & P \\ Q & C \end{pmatrix},$$

где B и C – квадратные матрицы и хотя бы одна из матриц P, Q – нулевая.

Пример 1. Матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -3 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

являются полураспавшимися.

Предложение 3.1. *Если матрица*

$$A = \begin{pmatrix} B & P \\ Q & C \end{pmatrix}$$

- полураспавшаяся, то $|A| = |B|\,|C|$.

Доказательство.
Применим индукцию. Для матриц второго порядка утверждение очевидно. Пусть утверждение имеет место для матриц прядка $n - 1$. Докажем его справедливость для матриц порядка n. Будем считать, что $P = 0$ (случай $Q = 0$ будет вытекать из рассматриваемого с помощью транспонирования матрицы A). Пусть A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Разложим определитель матрицы A по первой строке:

$$|A| = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} a_{1j} M_{1j}.$$

Матрица, полученная вычеркиванием 1-й строки и j-го столбца, является полураспавшейся порядка $n - 1$. Поэтому по предположению индукции

$$M_{1j} = N_{1j}|C|,$$

где N_{1j} – минор элемента a_{1j} матрицы B. Тем самым

$$|A| = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} a_{1j} N_{1j}\,|C| = \left(\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} a_{1j} N_{1j} \right) |C| = |B|\,|C|.$$

Определитель произведения матриц

Теорема 3.1 (об определителе произведения). *Если A и B – квадратные матрицы, то*

$$|AB| = |A||B|.$$

Доказательство.
Пусть $A = ||a_{ij}||$ и $B = ||b_{ij}||$ - квадратные матрицы порядка n. Из предложения 3.1

$$|A||B|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Не изменяя значения определителя матрицы, стоящего в правой части этого равенства, выполним следующие преобразования: к 1-й строке прибавим (n + 1)-ую, умноженную на a_{11}, (n + 2)-ую, умноженную на a_{12}, …, (2n)-ую, умноженную на a_{1n}. Тогда получим равенство

$$|A||B|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

где

$$c_{1j}=\sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{ij},\ \ j=1,\dots,n,$$

– элементы первой строки матрицы AB. Теперь аналогичные преобразования проведем со 2-ой строкой, т.е. прибавим к ней (n + 1)-ую, умноженную на a_{21}, (n + 2)-ую, умноженную на a_{22}, …, (2n)-ую, умноженную на a_{2n}. Проведя преобразования подобного типа с остальными строками матрицы A, получим

$$|A||B|=\begin{vmatrix} 0 & AB \\ -E & B \end{vmatrix}.$$

Чтобы привести определитель матрицы, стоящей справа, к полураспавшемуся виду, поменяем местами 1-ый и (n + 1)-ый столбцы, 2-й и (n + 2)-ой, …, n – ый и (2n)-ый. Тогда

$$|A||B|=(-1)^n\begin{vmatrix} AB & 0 \\ B & -E \end{vmatrix}=(-1)^n|AB|\cdot|-E|=(-1)^n|AB|(-1)^n=|AB|.$$

Обратная матрица

Пусть A – квадратная матрица порядка n. Матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице A, если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Из того, что матрица A^{-1} может быть умножена на A как справа, так и слева, вытекает, что A^{-1} – тоже квадратная матрица порядка n.

Упражнение 1. Доказать, что $(A^{-1})^{-1} = A$.
Решение.
Пусть $B = A^{-1}$. Тогда, поскольку по определению обратной матрицы $AB = BA = E$, матрица A является обратной для матрицы B, то есть $(A^{-1})^{-1} = A$.

Из теоремы 3.1 следует, что $|A||A^{-1}| = |E| = 1$. Таким образом, если у матрицы A существует обратная, то $|A| \neq 0$ (такие матрицы называются *невырожденными*) и

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}.$$

Теорема 3.2 (о фальшивом разложении). *Для любой квадратной матрицы* $A = \|a_{ij}\|$ *порядка n справедливы равенства*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} |A|, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \qquad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} |A|, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \qquad (2)$$

Доказательство.
В случае $i = j$ эти формулы вытекают из формул (5) темы «Определители». Докажем равенство (1) при $i \neq j$. Пусть для определенности $i < j$. Рассмотрим определитель матрицы, которая получена из A заменой j-ой строки на i-ую. По следствию 2.1 определитель такой матрицы равен нулю. Тем не менее напишем его разложение по j-ой строке:

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}B_{jk}.$$

Остается заметить, что алгебраические дополнения B_{jk} совпадают с A_{jk}. Аналогично доказывается равенство (2) при $i \neq j$ (здесь вместо строк надо рассматривать столбцы и разлагать нулевой определитель по столбцу).

Для квадратной матрицы $A = \|a_{ij}\|$ порядка n *присоединенной* называется матрица

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найдем для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

присоединенную. Имеем

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8;\ A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6;\ A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4;\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2;\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4;\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2;\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7;$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -8 & 6 & 9 \\ -4 & -2 & -3 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Из теоремы 3.2 непосредственно вытекает

Следствие 3.1.

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A|E.$$

Теорема 3.3 (об обратной матрице). *Для любой невырожденной матрицы A обратная матрица единственна и имеет вид*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}.$$

Доказательство.
В силу следствия 3.1 имеем:

$$A\left(\frac{1}{|A|}\tilde{A}\right)=\frac{1}{|A|}A\tilde{A}=E,$$

$$\left(\frac{1}{|A|}\tilde{A}\right)A=E.$$

Тем самым матрица, определенная равенством (3.3), действительно является обратной. Докажем единственность обратной матрицы. Предположим, что нашлись две обратные матрицы A_1^{-1} и A_2^{-1}. Тогда, умножив равенство

$$AA_1^{-1}=E$$

слева на A_2^{-1}, получим:

$$A_2^{-1}AA_1^{-1}=A_2^{-1}E=A_2^{-1}.$$

Отсюда, в силу того, что $A_2^{-1}A=E$, вытекает равенство

$$A_1^{-1}=A_2^{-1}.$$

Пример 3. Найдем обратную матрицу для

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Для нахождения присоединенной матрицы найдем сначала все алгебраические дополнения:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix}=8;\ A_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3;\ A_{13}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-2;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-3 & 4\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-5;\ A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-3;\ A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-3 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-17;\ A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 4\\ 0 & 3\end{vmatrix}=-3;\ A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2.$$

Следовательно (напомним, что алгебраические дополнения для элементов строк в присоединенной матрице надо расположить в соответствующем столбце),

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}8 & -5 & -17\\ 3 & -3 & -3\\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Поскольку $|A| = 1\cdot A_{11} + 0\cdot A_{12} + 1\cdot A_{13} = -9$, получаем:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}=\begin{pmatrix}-\frac{8}{9} & \frac{5}{9} & \frac{17}{9}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9}\end{pmatrix}.$$

Упражнение 2. Найти обратную матрицу для

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Проверим невырожденность матрицы A:

$$|A| = 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-2) = -6 \neq 0,$$

следовательно, обратная матрица существует. Вычислим алгебраические дополнения к элементам матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Построим присоединенную матрицу:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -8 \\ 1 & -3 & 5 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Используя теорему 3.3, находим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -8 \\ 1 & -3 & 5 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Упражнение 3. Доказать, что $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Решение.

Пусть $C = B^{-1}A^{-1}$. Тогда, применяя свойство 1 произведения матриц, понятие единичной матрицы (лекция 1) и определение обратной матрицы, получим:

$$(AB)C = A(BC) = A(B(B^{-1}A^{-1})) = A((BB^{-1})A^{-1}) = A(EA^{-1}) = AA^{-1} = E;$$

$$C(AB) = (CA)B = ((B^{-1}A^{-1})A)B = (B^{-1}(A^{-1}A))B = (B^{-1}E)B = B^{-1}B = E.$$

Следовательно, матрица $C = B^{-1}A^{-1}$ удовлетворяет определению обратной матрицы для матрицы AB. Значит, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ
«*Обратная матрица*»

Задача 1.
Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

и проверить выполнение условий $A\,A^{-1} = A^{-1}A = E$.

Указание

Убедитесь, что матрица A – невырожденная, и примените способ вычисления обратной матрицы.

Решение

Убедимся, что матрица A – невырожденная. $\Delta_A = 1\cdot 4 - 2\cdot(-1) \neq 0$, следовательно, A^{-1} существует.
Вычислим алгебраические дополнения к элементам A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot 4 = 4;\quad A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot(-1) = -1\cdot(-1) = 1;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot 2 = -1\cdot 2 = -2;\quad A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot 1 = 1.$$

Применим способ вычисления обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Не забудьте, что обратная матрица образована из алгебраических дополнений к элементам ***транспонированной*** *матрицы!*

Найдем произведения $A\,A^{-1}$ и $A^{-1}A$:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}+\frac{1}{3} & \frac{1}{6}-\frac{1}{6} \\ \frac{4}{3}-\frac{4}{3} & \frac{2}{6}+\frac{4}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E;$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}+\frac{2}{6} & -\frac{2}{3}+\frac{4}{6} \\ -\frac{1}{3}+\frac{2}{6} & \frac{1}{3}+\frac{4}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Таким образом, найденная матрица A^{-1} отвечает определению обратной матрицы.

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

Задача 2.

Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Указание

Убедитесь, что матрица A – невырожденная, и примените способ вычисления обратной матрицы.

Решение

$\Delta_A = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2 \neq 0.$

Следовательно, матрица A невырожденная, и обратная матрица существует.

Вычислим алгебраические дополнения к элементам матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$$

Обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Задача 3.

Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Указание

Убедитесь, что матрица A – невырожденная, и примените способ вычисления обратной матрицы.

Решение

Вычислим определитель матрицы A разложением по первому столбцу:

$$\Delta_A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 .$$

Следовательно, обратная матрица для матрицы A существует.
Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Значит,

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 4.
Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Указание

Убедитесь, что матрица A – невырожденная, и примените способ вычисления обратной матрицы.

Решение

$$\Delta_A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 10 \neq 0.$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,5 & 0,4 \\ 0,1 & 0,5 & -0,2 \\ -0,1 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}..$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,5 & 0,4 \\ 0,1 & 0,5 & -0,2 \\ -0,1 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}.$

Задача 5.

При каких x, y, z матрица

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & x \\ 1 & -5 & y \\ -1 & 6 & z \end{pmatrix}$$

является обратной к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}?$$

Указание

Необходимым условием того, что $B = A^{-1}$, является требование $AB = E$.

Решение

Проверим невырожденность матрицы A:

$$\Delta_A = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) = -1 \neq 0.$$

Необходимым условием того, что $B = A^{-1}$, является требование $AB = E$.

Найдем AB:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x + 2y + 3z \\ 0 & 1 & x - y \\ 0 & 0 & -x + 2y + z \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы выполнялось условие $AB = E$, x, y, z должны быть решением системы уравнений

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 0 \\ x - y = 0 \\ -x + 2y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ 4x + 3z = 0 \\ x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ z = -\frac{4}{3}x \\ x - \frac{4}{3}x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -3, \\ z = 4 \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Проверим, будет ли равно единичной матрице произведение BA:

$$BA = \begin{pmatrix} 2-4+3 & 2+4-6 & 3-3 \\ 2-5+3 & 2+5-6 & 3-3 \\ -2+6-4 & -2-6+8 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Значит, при найденных значениях x, y, z $B = A^{-1}$.

Ответ: x = -3, y = -3, z = 4.

1.2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1.2.1. *Системы с квадратной матрицей. Решение с помощью обратной матрицы. Правило Крамера*

Системы в матричном виде

Система уравнений вида

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (1)$$

называется *системой линейных алгебраических уравнений.* Числа a_{ij}, i = 1,...,m, j = 1,..., n, называются *коэффициентами системы*, b_i, i = 1,..., m, – *свободными членами*, а x_j, j = 1,..., n, – *неизвестными*. Требуется по заданным коэффициентам системы и свободным членам найти *решение системы*, т.е. все такие числа $x_1,\ldots, x_n$, которые удовлетворяют равенствам (4.1). Если таких чисел не существует, то систему называют *несовместной*, в противном случае (т.е. если существует хотя бы одно решение системы) ее называют *совместной*.

Положим

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Матрица A называется *матрицей системы*, b – *столбцом свободных членов*, x – *столбцом неизвестных*. Из определения умножения матриц вытекает, что равенства (4.1) могут быть записаны в виде

$$Ax = b, \quad (2)$$

называемым *матричным* видом системы.

Решение с помощью обратной матрицы

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений в матричном виде (2) с невырожденной квадратной матрицей A. В силу теоремы об обратной матрице (теорема 3.3) у матрицы A существует обратная матрица A^{-1}. Умножив равенство (4.2) слева на A^{-1}, будем иметь

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b.$$

Отсюда получаем решение системы

$$x = A^{-1}b. \qquad (3)$$

Пример 1.
Найти решение системы

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

с помощью обратной матрицы.
Выпишем матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем присоединенную матрицу $\tilde{A}$. Имеем:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \; A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \; A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5, \; A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \; A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \; A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \; A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5.$$

Следовательно,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы A с помощью разложения по первой строке:

$$|A| = 1\cdot(-3) + 2\cdot(-3) + (-1)\cdot 3 = -12.$$

Таким образом,

$$A^{-1} = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$x = A^{-1}b = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тем самым $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

Упражнение 1.
Найти решение системы

$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 6,$$
$$x_1 - x_2 + 7x_3 = 7,$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$$

с помощью обратной матрицы.
Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим $|A|$ и алгебраические дополнения к элементам матрицы A и найдем обратную матрицу:

$$|A| = 1\cdot 13 + 1\cdot(-5) + 1\cdot(-17) = -9;$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 13,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -5,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = -17,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -3,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 13 & -5 & -17 \\ 6 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся формулой (3):

$$x = A^{-1}b = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 13 & -5 & -17 \\ 6 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $x_1 = x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

Правило Крамера

Из теоремы об обратной матрице следует, что равенство (4.3) может быть записано в виде

$$x = \frac{1}{|A|}\tilde{A}b.$$

Следовательно,

(4)

$$x_j = \frac{1}{|A|}(b_1A_{1j} + ... + b_nA_{nj}),\ j = 1,...,n.$$

Обозначим через Δ_j определитель матрицы, которая получается из A заменой j-го столбца на столбец свободных членов:

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{n.j-1} & b_n & a_{n,j+1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Разлагая этот определитель по j-му столбцу, будем иметь:

$$\Delta_j = b_1A_{1j} + ... + b_nA_{nj}.$$

Тем самым равенства (4) могут быть записаны в виде

(5)

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{|A|},$$

$$...$$

$$x_n = \frac{\Delta_n}{|A|}.$$

Таким образом, доказана

Теорема 4.1 (правило Крамера). *Решение системы*

$$Ax = b$$

с невырожденной квадратной матрицей A единственно и имеет вид (5).

Пример 2.

Найти решение системы

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 4,$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 2,$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$$

с помощью правила Крамера.
Имеем

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -6,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3,\ |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Следовательно,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{|A|} = 2,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{|A|} = 1,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{|A|} = 1.$$

Упражнение 2.
Найти решение системы

$$x_1 + 5x_2 - x_3 = 0,$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 3,$$
$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2$$

с помощью правила Крамера.
Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix},\ |A| = 1 \cdot 1 + 5 \cdot 7 - 1 \cdot 5 = 31 \neq 0.$$

Следовательно, система совместна и определена. Воспользуемся правилом Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 7 - 1 \cdot 4 = 31,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-7) - 1 \cdot (-7) = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) + 5 \cdot 7 = 31.$$

Следовательно,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{|A|} = \frac{31}{31} = 1,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{|A|} = \frac{0}{31} = 0,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{|A|} = \frac{31}{31} = 1.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «*Решение систем с помощью обратной матрицы. Правило Крамера*»

Задача 1.
Решить систему по правилу Крамера:

$$\begin{cases} 4x - y + z = 2 \\ x + y - 2z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 6 \end{cases}.$$

Указание

Найдите главный определитель системы (поскольку он не равен нулю, система имеет единственное решение). Затем вычислите Δ_x, Δ_y и Δ_z.

Решение

Главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0,$$

следовательно, система имеет единственное решение.
Найдем Δ_x, Δ_y и Δ_z:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 9, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 36, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 18.$$

Напоминаем: определители Δ_x, Δ_y и Δ_z получены из определителя Δ заменой столбца коэффициентов при соответствующем неизвестном на столбец свободных членов.

Отсюда

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{9}{9} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{36}{9} = 4, \quad \Delta_z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{18}{9} = 2.$$

Ответ: $x = 1$, $y = 4$, $z = 2$.

Задача 2.
Используя правило Крамера, выяснить, при каких значениях a система

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

Указание

Для того, чтобы система была совместна, но не определена, должно выполняться условие

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0.$$

Решение

Главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}.$$

Разложением по первой строке получим:

$$\Delta = a(a^2 - 1) - (a - 1) + (1 - a) =$$
$$= a(a + 1)(a - 1) - 2(a - 1) = (a - 1)(a^2 + a - 2) =$$
$$= (a - 1)^2(a + 2).$$

Следовательно, $\Delta = 0$ при $a = 1$ или $a = -2$.
Значит, при $a \neq 1$ и при $a \neq -2$ система имеет единственное решение.
Определим число решений при $a = 1$ и $a = -2$.
1) При $a = 1$ система имеет вид:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$и \quad \Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Очевидно, что при этом система имеет бесконечно много решений, так как она фактически состоит из одного уравнения, и ее решениями будут любые три числа, сумма которых равна 1.
2) При $a = -2$ получаем систему

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2, \\ x + y - 2z = 4 \end{cases}$$

для которой

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.$$

Следовательно, этом случае решений нет.

Ответ: $a = 1$.

Задача 3.

Решить систему с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x + y - z = 6 \\ 5x - 4y - 7z = 4 \end{cases}.$$

Указание

Убедитесь, что матрица системы невырождена, то есть ее определитель не равен нулю. Затем найдите для нее обратную матрицу и умножьте эту матрицу на столбец свободных членов.

Решение

Составим матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

$\Delta_A = -51 \neq 0$, следовательно, система имеет единственное решение.

Найдем матрицу A^{-1}:

$$A_{11} = -11 \quad A_{21} = -25 \quad A_{31} = 2$$
$$A_{12} = 9 \quad A_{22} = -12 \quad A_{32} = 3$$
$$A_{13} = -13 \quad A_{23} = -11 \quad A_{33} = 7$$

Тогда

$$A^{-1} = -\frac{1}{51}\begin{pmatrix} -11 & -25 & 2 \\ 9 & -12 & 3 \\ -13 & -11 & 7 \end{pmatrix}.$$

Если

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

то исходная система превращается в матричное уравнение $AX = B$, решение которого $X = A^{-1}B$. Следовательно,

$$X = -\frac{1}{51}\begin{pmatrix} -11 & -25 & 2 \\ 9 & -12 & 3 \\ -13 & -11 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{51}\begin{pmatrix} -11-150+8 \\ 9-72+12 \\ -13-66+28 \end{pmatrix} = -\frac{1}{51}\begin{pmatrix} -153 \\ -51 \\ -51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то есть $x = 3$, $y = 1$, $z = 1$.

Ответ: $x = 3$, $y = 1$, $z = 1$.

Задача 4.

Решить систему по правилу Крамера и с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + 4y - 2z = 5 \end{cases}.$$

Указание

Для решения по правилу Крамера найдите определители Δ, Δ_x, Δ_y, Δ_z.

Для решения с помощью обратной матрицы составьте матрицу, обратную к матрице системы, и умножьте ее на столбец свободных членов.

Решение

1. Правило Крамера

Найдем главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 16 \neq 0.$$

Система имеет единственное решение.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 16, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 32, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 48.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{16}{16} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{32}{16} = 2, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{48}{16} = 3.$$

2. Решение с помощью обратной матрицы

Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы системы:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 4 & -2\end{vmatrix}=-2 \quad A_{21}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & -2\end{vmatrix}=6 \quad A_{31}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=7 \quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-5 \quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=11 \quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-1 \quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3$$

Составим матрицу, обратную к матрице системы:

$$A^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-2 & 6 & 2\\ 7 & -5 & 1\\ 11 & -1 & -3\end{pmatrix}.$$

Столбец решений системы получим, умножив A^{-1} на столбец свободных членов:

$$A^{-1}B=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-2 & 6 & 2\\ 7 & -5 & 1\\ 11 & -1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 3\\ 5\end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-12+18+10\\ 42-15+5\\ 66-3-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

1.2.2. *Ранг матрицы*

Определение ранга

Пусть дана матрица

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Выберем k строк и k столбцов в этой матрице и составим новую матрицу из элементов, стоящих на пересечении этих строк и столбцов. Определитель полученной матрицы называется *минором порядка* k. Например, если выбрать вторую и третью строки, первый и третий столбец, то получим минор второго порядка

$$M_2=\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

Пример 1.
Пусть

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 0 & 7 \\ 2 & 7 & 8 & -3 & 9 \\ 7 & -3 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выберем строки с номерами 1,3,4 и столбцы с номерами 2,3,5.

$$A=\begin{pmatrix} 4 & \boxed{3} & \boxed{-1} & 0 & \boxed{7} \\ 2 & 7 & 8 & -3 & 9 \\ 7 & \boxed{-3} & \boxed{5} & 3 & \boxed{4} \\ 0 & \boxed{1} & \boxed{6} & 4 & \boxed{1} \end{pmatrix}.$$

Вычисляя определитель матрицы, составленной из элементов, стоящих на пересечении этих строк и столбцов, получим минор 3-го порядка

$$M_3=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ -3 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}=111.$$

В матрице A много миноров 3-го порядка. Если выбрать строки с номерами 1,2,4 и столбцы с номерами 1,2,5:

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{4} & \boxed{3} & -1 & 0 & \boxed{7} \\ \boxed{2} & \boxed{7} & 8 & -3 & \boxed{9} \\ 7 & -3 & 5 & 3 & 4 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & 6 & 4 & \boxed{1} \end{pmatrix},$$

то получим еще один из них:

$$M_3'=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 2 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Рангом матрицы называется максимальный порядок ее миноров, отличных от нуля.

Ранг матрицы A будем обозначать через rg A.

Элементарные преобразования матрицы

Вычисление ранга матрицы удобно производить, приведя матрицу к более простому виду с помощью преобразований, которые не меняют ее ранга.

Элементарными преобразованиями строк матрицы называются преобразования вида:

1. Перестановка двух строк.
2. Умножение строки на число, отличное от нуля.
3. Прибавление к одной строке другой строки, умноженной на число.

Аналогично определяются *элементарные преобразования столбцов.*

Теорема 5.1. *При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется.*

Доказательство.

Остановимся лишь на доказательстве этого утверждения для 3-го типа элементарных преобразований для строк. Пусть матрица B получена из матрицы $A = ||a_{ij}||$ прибавлением к j-ой строке i-ой, умноженной на число λ. Покажем, что $\text{rg } B \le \text{rg } A$. Пусть $\text{rg } A = r$. Рассмотрим произвольный минор матрицы B порядка $n \ge r$. Если этот минор не содержит j-ой строки, то он совпадает с соответствующим минором матрицы A и, следовательно, равен нулю. Если же он содержит j-ую строку, то он может быть представлен в виде:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & \dots & a_{i_1k_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{jk_1} + \lambda a_{ik_1} & \dots & a_{jk_n} + \lambda a_{ik_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_nk_1} & \dots & a_{i_nk_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & \dots & a_{i_1k_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{jk_1} & \dots & a_{jk_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_nk_1} & \dots & a_{i_nk_n} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & \dots & a_{i_1k_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{ik_1} & \dots & a_{ik_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_nk_1} & \dots & a_{i_nk_n} \end{vmatrix}.$$

Первый определитель равен нулю, так как он является минором матрицы A порядка $n > r$. Если i совпадает с одним из чисел i_1, ..., i_n, то второй

определитель равен нулю как определитель с двумя равными строками. В противном случае второй определитель есть снова минор матрицы A порядка $n > r$ и поэтому тоже равен нулю.

Матрица A может быть получена из матрицы B прибавлением к j-ой строке i-ой, умноженной на $-\lambda$, и в силу доказанного rg $A \leq$ rg B. Тем самым доказано, что rg A = rg B.

Приведение матрицы к ступенчатому виду

Пусть дана ненулевая матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Опишем алгоритм, который с помощью элементарных преобразований приводит матрицу A к некоторому более простому виду. Будем использовать только элементарные преобразования строк, чтобы в дальнейшем можно было применить тот же алгоритм к решению систем линейных алгебраических уравнений.

Найдем в матрице A ненулевой элемент $a_{i_1 j_1}$ с минимальным номером столбца j_1 и переставим i_1-ую строку с первой. Тогда получим матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a^{(1)}_{1j_1} & \dots & a^{(1)}_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a'_{2j_1} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a'_{mj_1} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix},$$

где

$$a^{(1)}_{1j_1} = a_{i_1 j},\ j = j_1,\dots,n,\ a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij},\ i \neq i_1, \\ a_{1j},\ i = i_1, \end{cases} j = j_1,\dots,n.$$

Теперь будем прибавлять к каждой строке с номером i, $i = 2,\dots,m$ первую строку, умноженную на число $-\dfrac{a'_{ij_1}}{a^{(1)}_{1j_1}}$. В результате этих преобразований получим матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a^{(1)}_{1j_1} & a^{(1)}_{1,j_1+1} & \dots & a^{(1)}_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a^{(1)}_{2,j_1+1} & \dots & a^{(1)}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a^{(1)}_{m,j_1+1} & \dots & a^{(1)}_{mn} \end{pmatrix}.$$

Далее, с матрицей

$$\begin{pmatrix} a^{(1)}_{2,j_1+1} & \dots & a^{(1)}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a^{(1)}_{m,j_1+1} & \dots & a^{(1)}_{mn} \end{pmatrix}$$

проведем преобразования, аналогичные тем, которые делались с исходной матрицей. Тогда исходная матрица будет приведена к виду

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a^{(1)}_{1j_1} & \dots & a^{(1)}_{1,j_2-1} & a^{(1)}_{1j_2} & \dots & a^{(1)}_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a^{(2)}_{2j_2} & \dots & a^{(2)}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a^{(2)}_{mj_2} & \dots & a^{(2)}_{mn} \end{pmatrix}.$$

Продолжая этот процесс, придем к матрице *ступенчатого* вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a^{(1)}_{1j_1} & \dots & a^{(1)}_{1,j_2-1} & a^{(1)}_{1j_2} & \dots & a^{(1)}_{1,j_r-1} & a^{(1)}_{1j_r} & \dots & a^{(1)}_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a^{(2)}_{2j_2} & \dots & a^{(2)}_{2,j_r-1} & a^{(2)}_{2j_r} & \dots & a^{(2)}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a^{(r)}_{rj_r} & \dots & a^{(r)}_{rn} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Для такой матрицы легко найти ранг. Действительно, выбрав первые r строк и столбцы $j_1, \dots, j_r$, получим минор

$$\begin{vmatrix} a^{(1)}_{1j_1} & a^{(1)}_{1j_2} & \dots & a^{(1)}_{1j_r} \\ 0 & a^{(2)}_{2j_2} & \dots & a^{(2)}_{2j_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a^{(r)}_{rj_r} \end{vmatrix} = a^{(1)}_{1j_1} a^{(2)}_{2j_2} \dots a^{(r)}_{rj_r} \neq 0.$$

С другой стороны, любой минор порядка большего, чем r, равен нулю, так как содержит ненулевую строку. Тем самым ранг полученной матрицы равен r, а в силу того, что элементарные преобразования не меняют ранга матрицы, ранг исходной матрицы тоже равен r.

Пример 2.

Приведем к ступенчатому виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 & -1 & 2 & 19 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 1 & 14 \\ 0 & 3 & 9 & -1 & 3 & 21 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

и найдем ее ранг. Чтобы иметь дело с целыми числами, удобно иметь ненулевой элемент с минимальным номером столбца равным единице. Для этого вычтем из первой строки вторую:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 1 & 14 \\ 0 & 3 & 9 & -1 & 3 & 21 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 3 & 12 \end{pmatrix}.$$

Теперь будем вычитать из всех строк, начиная со второй, первую, умноженную на элемент, стоящий во втором столбце и соответствующей строке:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычтем из третьей строки вторую:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычитая из последней строки третью, приходим к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В полученной матрице три ненулевых строки, поэтому ее ранг, а значит, и ранг исходной матрицы равен 3.

Упражнение 1.
Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 9 & -3 \end{pmatrix},$$

приведя ее к ступенчатому виду.
Решение.
Поменяем местами 1-ую и 3-ю строки матрицы A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

Теперь вычтем 1-ую строку из 2-ой и 4-ой, а к 3-ей строке прибавим 1-ую, умноженную на 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 9 & -4 \end{pmatrix}.$$

Вычтем из 3-ей строки 2-ую, а из 4-ой – удвоенную 2-ую:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Поменяем местами 3-й и 4-й столбцы и вычтем из последней строки 3-ю:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим минор 4-го порядка из столбцов 1,2,3 и 5:

$$M_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-2) = 2 \neq 0.$$

Следовательно, rg A = 4.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «*Ранг матрицы*»

Задача 1.

Определить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Указание

Единственным минором максимального (3-го) порядка для матрицы A является ее определитель. Если Δ_A не равен нулю, $r(A) = 3$; если $\Delta_A = 0$, $r(A) < 3$.

Решение

Единственным минором максимального (3-го) порядка для матрицы A является ее определитель. Если Δ_A не равен нулю, $r(A) = 3$; если $\Delta_A = 0$, $r(A) < 3$.
Найдем Δ_A разложением по первой строке:

$$\Delta_A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 20 - 5 - 15 = 0.$$

Следовательно, $r(A) < 3$. Поскольку матрица A содержит ненулевые элементы, $r(A) > 0$. Значит, $r(A) = 1$ или $r(A) = 2$. Если найдется минор 2-го порядка, не равный нулю, то $r(A) = 2$.
Вычислим минор из элементов, стоящих на пересечении двух первых строк и двух первых столбцов:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2.$$

Ответ: $r(A) = 2$.

Если найден минор k-го порядка, не равный нулю, то можно утверждать, что r(A) ≥ k. Если же выбранный минор k-го порядка равен нулю, то из этого еще не следует, что r(A) < k, так как могут найтись миноры того же порядка, не равные нулю.

Задача 2.

Определить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ -3 & 3 & -1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Указание

Используя элементарные преобразования, приведите матрицу A к треугольному виду.

Решение

У матрицы A существуют миноры до 4-го порядка включительно, поэтому $r(A) \leq 4$. Разумеется, непосредственное вычисление всех миноров 4-го, 3-го и т.д. порядка потребовало бы слишком много времени. Поэтому, используя

элементарные преобразования, приведем матрицу A к треугольному виду. Поменяем местами 1-ю и 2-ю строки, чтобы элемент a_{11} стал равным 1:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ -3 & 3 & -1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Прибавим к третьей строке первую, ко второй – удвоенную первую, к четвертой – первую, умноженную на 3. Тогда все элементы 1-го столбца, кроме a_{11}, окажутся равными нулю:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Вычтем вторую строку полученной матрицы из третьей и четвертой строк:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

и вычеркнем нулевые строки:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}..$$

Итак, ранг матрицы A равен рангу полученной матрицы размера 2×6, т.е. $r(A) \leq 2$. Минор

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

следовательно, $r(A) = 2$.

Ответ: $r(A) = 2$.

Задача 3.

Определить ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}.$$

Указание

Используя элементарные преобразования, приведите матрицу A к треугольному виду.

Решение

Отметим, что минор, составленный из элементов матрицы, стоящих на пересечении первых трех строк и первых трех столбцов, не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

поэтому ранг данной матрицы не меньше трех.

Приведем матрицу к треугольному виду:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 13 & 28 \\ 0 & 5 & 6 & 28 & 61 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 6 & 18 & 36 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычеркивание нулевых строк приводит к тому, что

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Размер полученной матрицы 3×5, поэтому ее ранг не более трех. Поскольку минор 3-го порядка, не равный нулю, существует, ранг исходной матрицы равен 3.

Ответ: $r(A) = 3$.

Задача 4.

Найти значения λ, при которых матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

имеет наименьший ранг.

Указание

Приведите матрицу A к треугольному виду и найдите значения λ, при которых с помощью элементарных преобразований вторую строку можно сделать нулевой.

Решение

Переставим столбцы матрицы A:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 10 & 1 & \lambda \\ 7 & 17 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

и приведем ее к треугольному виду с помощью элементарных преобразований:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -15 & \lambda - 12 \\ 0 & 10 & -25 & -20 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -15 & \lambda - 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -15 & \lambda - 12 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 2 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Теперь видно, что при $\lambda = 0$ вторая строка матрицы становится нулевой, и после ее вычеркивания получаем:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Минор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$ его порядок равен 2, следовательно, при $\lambda = 0$ $r(A) = 2$.

Если $\lambda \neq 0$, то минор, составленный из последних трех столбцов, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 2 & -5 & -4 \end{vmatrix} = -\lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -\lambda \cdot (-13) = 13\lambda \neq 0.$$

Значит, при $\lambda \neq 0$ $r(A) = 3$.

Итак, наименьший ранг, равный 2, матрица A имеет при $\lambda = 0$.

Ответ: $\lambda = 0$.

1.2.3. *Решение систем линейных уравнений в общем случае. Теорема Кронекера-Капелли*

Теорема о базисном миноре

Базисным минором матрицы называется отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу матрицы.

Пример 1. В матрице

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 & -1 & 2 & 19 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 1 & 14 \\ 0 & 3 & 9 & -1 & 3 & 21 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

из примера 2 раздела «Ранг матрицы», ранг которой равен 3, базисным минором является, например, минор, получаемый при выборе строк с номерами 1,2,3 и столбцов с номерами 3,4,5. Действительно,

$$M_3 = \begin{vmatrix} 9 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 1 \\ 9 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$$

Можно выбрать и другой базисный минор, например, минор, получаемый при выборе строк с номерами 1,2,3 и столбцов с номерами 4,5,6:

$$M_3' = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 19 \\ 0 & 1 & 14 \\ -1 & 3 & 21 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$$

Теорема 6.1 (о базисном миноре). *Любая строка (столбец) матрицы есть линейная комбинация строк (столбцов) базисного минора.*

Доказательство.

В силу того, что при транспонировании матрицы базисный минор остается базисным, достаточно доказать утверждение для столбцов. Будем считать, что базисный минор порядка r находится в левом верхнем углу матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mr} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(этого всегда можно добиться перестановкой строк и столбцов). Зафиксируем некоторый номер столбца k, $r < k \leq n$, и рассмотрим определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rk} \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & a_{ik} \end{vmatrix},$$

где $1 \le i \le m$. Если $1 \le i \le r$, то этот определитель равен нулю как определитель с двумя одинаковыми строками (см. следствие 2.1), а если $r < i \le m$, то он равен нулю как минор порядка $r + 1$ (ведь ранг матрицы равен r). Разложив рассматриваемый определитель по последней строке, будем иметь

$$a_{i1}A_{r+1,1} + \dots + a_{ir}A_{r+1,r} + a_{ik}A_{r+1,r+1} = 0. \qquad (1)$$

Поскольку $A_{r+1,r+1}$ не равно нулю (это алгебраическое дополнение совпадает с выбранным базисным минором), то при всех $1 \le i \le m$ из равенства (1) получаем

$$a_{ik} = \lambda_1 a_{i1} + \dots + \lambda_r a_{ir},\ \lambda_j = -\frac{A_{r+1,j}}{A_{r+1,r+1}}.$$

Это и означает, что

$$\begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_r \begin{pmatrix} a_{1r} \\ \vdots \\ a_{mr} \end{pmatrix}.$$

Теорема Кронекера-Капелли

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \qquad (2)$$

Напомним, что матрицей системы A и столбцом свободных членов b называются матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Нам потребуется еще понятие *расширенной* матрицы системы

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Теорема 6.2 (Кронекера-Капелли). *Для того чтобы система* (2) *была совместна, необходимо и достаточно, чтобы*

$$rg\bar{A} = rgA. \qquad (3)$$

Доказательство.

1. Необходимость.

Пусть система (2) совместна. Это означает, что найдутся числа $x_1, \ldots, x_n$ такие, что

$$x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n = b, \qquad (4)$$

где через A_j, $j = 1, ..., n$, обозначается j-й столбец матрицы A. Вычитая из последнего столбца расширенной матрицы $\bar{A}$ первый, умноженный на x_1, затем второй, умноженный на x_2 и т.д., последний, умноженный на x_n, придем к матрице

$$\bar{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & 0 \end{pmatrix},$$

ранг которой равен рангу расширенной матрицы $\bar{A}$. Поскольку очевидно, что rg $\bar{A}'$ = rg A, имеет место равенство (3).

2. Достаточность.

Пусть выполнено равенство (3). Выберем в матрице A базисный минор. Пусть его столбцы имеют номера $j_1,...,j_r$. Этот же минор является базисным и для расширенной матрицы $\bar{A}$. По теореме о базисном миноре столбец b может быть представлен как линейная комбинация столбцов базисного минора

$$\lambda_1 A_{j_1} + \ldots + \lambda_r A_{j_r} = b.$$

Положив

$$x_{j_k} = \lambda_k, k = 1, \ldots, r, \quad x_j = 0, j \notin j_1, \ldots, j_r,$$

получим, что имеет место равенство (4). Это означает, что найденные x_j, $j = 1,...,n$, удовлетворяют системе (2).

Общее решение системы линейных алгебраических уравнений

Пусть дана совместная система линейных алгебраических уравнений (2). Выберем в матрице этой системы какой-нибудь базисный минор. Неизвестные, коэффициенты при которых образуют столбцы базисного минора, называются *базисными*, а остальные неизвестные – *свободными*.

Общим решением системы называется представление базисных неизвестных через свободные. Будем считать, что порядок базисного минора равен r и он находится в левом верхнем углу (этого всегда можно добиться, переставляя уравнения системы и переобозначая переменные). Из теоремы

Кронекера-Капелли вытекает, что этот минор является базисным и для расширенной матрицы, а из теоремы о базисном миноре следует, что все строки в расширенной матрице, начиная с (r + 1)-ой, есть линейные комбинации строк базисного минора. Иначе говоря, все уравнения системы, начиная с (r + 1)-ого, являются следствием первых r уравнений и их можно отбросить. Перенеся свободные неизвестные в правую сторону, получим систему

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n + b_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n + b_r.$$

Запишем эту систему в матричном виде:

$$M\xi = x_{r+1}\alpha_{r+1} + \ldots + x_n\alpha_n + \beta, \qquad (5)$$

где

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix}, \xi = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}, \alpha_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{rj} \end{pmatrix},$$

$$j = r+1, \ldots, n, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix}.$$

В силу того, что $|M|$ не равен нулю, существует обратная матрица M^{-1}. Умножая равенство (5) на M^{-1}, получим общее решение

$$\xi = x_{r+1}M^{-1}\alpha_{r+1} + \ldots + x_nM^{-1}\alpha_n + M^{-1}\beta. \qquad (6)$$

Введем столбцы из n строк:

$$e_0 = \begin{pmatrix} M^{-1}\beta \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} M^{-1}\alpha_{r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} M^{-1}\alpha_{r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_{n-r} = \begin{pmatrix} M^{-1}\alpha_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Придавая свободным переменным x_{r+1}, ..., x_n произвольные числовые значения C_1, …, $C_{n\text{-}r}$, общее решение (6.6) можно переписать в виде:

$$x = e_0 + C_1e_1 + \ldots + C_{n\text{-}r}e_{n\text{-}r}.$$

Если свободные неизвестные отсутствуют, т.е. $r = n$, то решение системы единственно. Таким образом, из теоремы Кронекера-Капелли вытекает

Следствие 6.1. *Для того чтобы система* (2) *имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы*

$$rg\overline{A} = rgA = n.$$

Тем самым возможны лишь следующие три случая:

1. $rg\overline{A} \neq rgA$ – система несовместна.
2. $rg\overline{A} = rgA = n$ – система имеет единственное решение.
3. $rg\overline{A} = rgA < n$ – система имеет бесконечно много решений.

Однородные системы

Система (2) называется *однородной*, если $b_1 = ... = b_m = 0$. Очевидно, что однородная система всегда совместна – у нее имеется нулевое решение $x_1 = x_n = 0$. Для однородной системы возможны лишь следующие два случая:

1. $rg\overline{A} = rgA = n$ – система имеет единственное нулевое решение.
2. $rg\overline{A} = rgA < n$ – система имеет бесконечно много решений.

Поскольку для квадратной матрицы A порядка n rg $A < n$ в том и только в том случае, если $|A| = 0$, получаем

Следствие 6.2. *Однородная система с квадратной матрицей имеет ненулевое решение в том и только в том случае, если* $|A| = 0$.

Метод Гаусса

При практическом решении систем линейных алгебраических уравнений удобно пользоваться *методом Гаусса*, который состоит в приведении расширенной матрицы системы к ступенчатому виду. Предположим, что расширенная матрица системы (2) приведена к ступенчатому виду. Будем считать, что переменные переобозначены так, что базисный минор матрицы системы находится в левом верхнем углу:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1r}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2r}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr}^{(r)} & \dots & a_{rn}^{(r)} & b_r^{(r)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_{r+1}^{(r+1)} \end{pmatrix}.$$

Это означает, что система (2) приведена к виду

$$\begin{gathered} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \dots + a_{1r}^{(1)}x_r + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(2)}x_2 + \dots + a_{2r}^{(2)}x_r + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{rr}^{(r)}x_r + \dots + a_{rn}^{(r)}x_n = b_r^{(r)}, \\ 0 = b_{r+1}^{(r+1)}. \end{gathered} \qquad (7)$$

Процесс приведения системы к виду (7) называется *прямым ходом* метода Гаусса.

Если $b^{(r+1)}{}_{r+1}$ не равно нулю , то система несовместна. Если $b^{(r+1)}{}_{r+1} = 0$, то из r-го уравнения выразим базисное неизвестное x_r через свободные неизвестные x_{r+1}, ..., x_n. Затем подставим это выражение в $(r-1)$-ое уравнение и выразим x_{r-1} через свободные неизвестные и т.д. Этот процесс называется *обратным ходом* метода Гаусса. В результате обратного хода все базисные неизвестные будут выражены через свободные, т.е. будет получено общее решение системы.

Пример 2. Найдем решение системы

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_5 = 3, \\ 3x_1 + 7x_2 - 8x_3 + 2x_4 - x_5 = 5, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -1 \end{gathered}$$

методом Гаусса. Выпишем расширенную матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -5 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & -8 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -4 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычтем из строк с номерами 2,3,4 и 5 первую строку, умноженную на числа 2,1,2 и 2 соответственно. Тогда получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычитая из третьей и четвертой строк вторую и прибавляя к пятой строке вторую, придем к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исходная система приведена к виду

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 1,$$
$$x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 2.$$

Выбрав x_1 и x_2 в качестве базисных неизвестных, с помощью обратного хода метода Гаусса находим выражения базисных неизвестных через свободные:

$$x_1 = 5x_3 - 3x_4 + 5x_5 - 3,$$
$$x_2 = -x_3 + x_4 - 2x_5 + 2.$$

Придавая свободным переменным x_3, x_4, x_5 произвольные числовые значения C_1, C_2, C_3, общее решение можно переписать в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 1. Найти решение системы

$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1,$$
$$2x_1 - 6x_2 + 7x_3 - x_4 = 0,$$
$$x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3$$

методом Гаусса.

Решение.

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & -6 & 7 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

и приведем ее к ступенчатому виду. Для этого вычтем из 3-ей строки 1-ую, а из 2-ой – удвоенную первую:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь прибавим к 3-ей строке 2-ую:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, исходная система приведена к виду

$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1,$$
$$-x_3 + x_4 = -2.$$

Выберем в качестве базисных неизвестных x_1 и x_3 и выразим их через свободные неизвестные x_2 и x_4:

$$x_1 = 3x_2 - 3x_4 - 9,$$
$$x_3 = x_4 + 2.$$

Если $x_2 = C_1$, $x_4 = C_2$, то общее решение системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «*Системы уравнений общего вида. Метод Гаусса*»

Задача 1.

Указать базисный минор матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Указание

Определите вначале ранг матрицы A, а затем найдите ненулевой минор, порядок которого равен $r(A)$.

Решение

Определим $r(A)$. Вторая и четвертая строки A равны, поэтому после вычитания из 4-й строки 2-й получаем:

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим минор полученной матрицы, составленный из первых трех столбцов:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) = -4 \neq 0.$$

Таким образом, найден минор максимально возможного (3-го) порядка, не равный нулю. Следовательно, ранг матрицы A равен рангу преобразованной матрицы, то есть равен 3, а рассмотренный минор является базисным.

Ответ: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Задача 2.

Определить количество решений системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - 8x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 1 \end{cases}.$$

Указание

Сравните ранги матрицы системы и расширенной матрицы.

Решение

Сравним ранги матрицы системы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 5 & -8 \\ 3 & 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

и расширенной матрицы

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 5 & -8 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & -4 & 1 \end{array}\right).$$

Для удобства вычислений будем искать ранг матрицы A_1, отделив ее последний столбец вертикальной чертой. Тогда столбцы, стоящие слева от черты, образуют матрицу A, и мы одновременно найдем ранги обеих матриц.

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -8 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -4 & 1 \end{array}\right).$$

Вычтем из второй строки удвоенную первую, а из третьей – первую, умноженную на 3:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -8 & 2 \\ 0 & 5 & -11 & 20 & 1 \\ 0 & 5 & -11 & 20 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -8 & 2 \\ 0 & 5 & -11 & 20 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Таким образом, $r(A) = 2$, а $r(A_1) = 3$, следовательно, система не имеет решений.

Ответ: система несовместна.

Задача 3.

Найти общее решение линейной системы

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 5x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 5 \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + 9x_5 = 4 \end{cases}.$$

Указание

Убедившись в том, что система совместна, определите базисные и свободные неизвестные и выразите базисные неизвестные через свободные.

Решение

Найдем $r(A)$ и $r(A_1)$:

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 2 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 6 & 5 \\ 8 & -1 & 1 & 1 & 9 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 6 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -1 & -2 \\ 8 & -1 & 1 & 1 & 9 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & -7 & 11 & -13 & -12 \\ 0 & 5 & -7 & 11 & -13 & -12 \\ 0 & 15 & -21 & 33 & -39 & -36 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & -7 & 11 & -13 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & -7 & 11 & -13 & -12 \end{array}\right).$$

Итак, $r = r(A) = r(A_1) = 2$, а число неизвестных $n = 5$. Следовательно, $r < n$, и система имеет бесконечно много решений (совместна, но не определена).

Число базисных неизвестных равно r, то есть двум. Выберем в качестве базисных неизвестных x_1 и x_2, коэффициенты при которых входят в базисный минор преобразованной матрицы A: $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$.

Соответственно x_3, x_4, x_5 – свободные неизвестные.

Запишем систему, равносильную исходной, коэффициентами в которой являются элементы полученной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 5 \\ 5x_2 - 7x_3 + 11x_4 - 13x_5 = -12 \end{cases}$$

и выразим базисные неизвестные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{x_3 + 2x_4 + 4x_5 - 1}{5} \\ x_2 = \dfrac{7x_3 - 11x_4 + 13x_5 - 12}{5} \end{cases}.$$

Получено общее решение системы. Одно из частных решений можно найти, положив все свободные неизвестные равными нулю: $x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Тогда $x_1 = -\dfrac{1}{5},\ x_2 = -\dfrac{12}{5}$.

Ответ: $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{x_3 + 2x_4 + 4x_5 - 1}{5} \\ x_2 = \dfrac{7x_3 - 11x_4 + 13x_5 - 12}{5} \end{cases}.$

Задача 4.

Найти общее решение системы, выразив в ответе первые неизвестные через последние:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}.$$

Указание

Приведите расширенную матрицу к виду

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & 8 & -5 & -12 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & -11 \end{array}\right).$$

Решение

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & 8 & -5 & -12 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & -11 \end{array}\right).$$

Минор, состоящий из первых трех столбцов полученной матрицы,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 8 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -24 \neq 0,$$

поэтому $r(A) = r(A_1) = 3$, выбранный минор является базисным, а x_1, x_2, x_3, коэффициенты при которых составляют базисный минор, – базисными неизвестными. Тогда свободное неизвестное – x_4, и система, равносильная исходной, имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 - x_4 \\ -7x_2 + 8x_3 = 5x_4 - 12, \\ -3x_2 = -x_4 - 11 \end{cases}$$

откуда $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{6x_4 + 5}{8} \\ x_2 = \dfrac{x_4 + 11}{3} \\ x_3 = \dfrac{22x_4 + 41}{24} \end{cases}$.

Ответ: $x_1 = -\dfrac{6x_4 + 5}{8}$; $x_2 = \dfrac{x_4 + 11}{3}$; $x_3 = \dfrac{22x_4 + 41}{24}$.

Задача 5.

Найти фундаментальную систему решений однородной линейной системы

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}.$$

Указание

Количество решений, образующих фундаментальную систему, равно числу свободных неизвестных. Задайте свободным неизвестным значения 1,0,0; 0,1,0; 0,0,1 и вычислите соответствующие значения базисных неизвестных.

Решение

Количество решений, образующих фундаментальную систему, равно числу свободных неизвестных.

Матрица A_1 отличается от матрицы A только добавлением нулевого столбца свободных членов, поэтому все ее ненулевые миноры являются минорами матрицы A, то есть $r(A) = r(A_1)$. Найдем $r(A)$:

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&3&4&-1\\1&5&-1&-1&-1\\1&-6&4&5&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&-1&3&4&-1\\1&-6&4&5&0\\1&-6&4&5&0\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}2&-1&3&4&-1\\1&-6&4&5&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&-1&3&4&-1\\1&-6&4&5&0\end{pmatrix}.$$

Выберем в качестве базисного минора $\begin{vmatrix}4&-1\\5&0\end{vmatrix}=5\neq 0.$

Значит, $r(A) = 2$. Пусть x_4, x_5 – базисные неизвестные, x_1, x_2, x_3 – свободные неизвестные. Запишем для них новую систему:

$$\begin{cases}4x_4-x_5=-2x_1+x_2-3x_3\\5x_4=-x_1+6x_2-4x_3\end{cases},$$

откуда

$$\begin{cases}x_4=\dfrac{-x_1+6x_2-4x_3}{5}\\x_5=\dfrac{6x_1+19x_2-x_3}{5}\end{cases}.$$

Фундаментальная система решений состоит из трех столбцов. Рассмотрим три набора значений свободных неизвестных:

1) $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 0$.

Тогда $x_4 = -0{,}2$, $x_5 = 1{,}2$, и решение можно записать в виде столбца

$$X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-0{,}2\\1{,}2\end{pmatrix}.$$

2) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$.

При этом $x_4 = 1{,}2$, $x_5 = 3{,}8$, и следующее решение системы имеет вид

$$X_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1{,}2\\3{,}8\end{pmatrix}.$$

3) $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Отсюда $x_4 = -0{,}8$, $x_5 = -0{,}2$, и последний столбец

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -0,8 \\ -0,2 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная система решений, построенная при таком выборе свободных неизвестных, называется ***нормальной****. Поскольку столбцы свободных неизвестных* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *линейно независимы, это гарантирует линейную независимость решений* X_1, X_2, X_3.

Итак, в качестве фундаментальной системы решений можно выбрать

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -0,2 \\ 1,2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1,2 \\ 3,8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -0,8 \\ -0,2 \end{pmatrix}.$$

При этом любое решение данной системы имеет вид: $X = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3$, где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные. Эта формула задает общее решение системы.

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -0,2 \\ 1,2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1,2 \\ 3,8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -0,8 \\ -0,2 \end{pmatrix}.$

Задача 6.

Составить однородную систему из двух уравнений, для которой столбцы

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений.

Указание

Пусть искомая система имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = 0 \end{cases}.$$

Подставьте вместо $x_1, \ldots, x_5$ элементы столбцов X_1, X_2, X_3 и решите полученную систему уравнений для коэффициентов a_{ij}.

Решение

Существует бесконечно много систем однородных линейных уравнений, для каждой из которых фундаментальная система решений имеет указанный вид. Число уравнений в таких системах может быть различным. При этом можно указать их наименьшее требуемое количество, а увеличивать их число можно неограниченно.

Определим вначале, из какого наименьшего числа уравнений может состоять такая система.

Число элементов каждого столбца равно пяти, следовательно, в системе пять неизвестных ($n = 5$). Количество столбцов, составляющих фундаментальную систему, равно трем, то есть $n - r = 3$, поэтому $r = 5 - 3 = 2$. Значит, матрица A должна иметь по крайней мере 2 строки. Следовательно, система уравнений с заданной фундаментальной системой решений может состоять из двух и более уравнений.

Пусть искомая система имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = 0 \end{cases}.$$

Подставим вместо $x_1, \ldots, x_5$ элементы столбцов X_1, X_2, X_3. Получим:

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + 2a_{13} - a_{14} + a_{15} = 0 \\ a_{21} + a_{22} + 2a_{23} - a_{24} + a_{25} = 0' \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{12} + 3a_{13} + a_{14} = 0 \\ a_{22} + 3a_{23} + a_{24} = 0' \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} - a_{12} + 2a_{15} = 0 \\ a_{21} - a_{22} + 2a_{25} = 0 \end{cases}.$$

Разобьем полученные 6 уравнений на две системы, одна из которых содержит a_{1i}, а вторая – a_{2i}:

1) $$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + 2a_{13} - a_{14} + a_{15} = 0 \\ a_{12} + 3a_{13} + a_{14} = 0 \\ a_{11} - a_{12} + 2a_{15} = 0 \end{cases}.$$

Найдем какое-либо частное решение этой системы. Приведем ее матрицу к треугольному виду:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix},$$

откуда $\begin{cases}a_{11}+a_{12}+2a_{13}=a_{14}-a_{15}\\ a_{12}+3a_{13}=-a_{14}\\ 4a_{13}=-3a_{14}-a_{15}\end{cases}$.

Следовательно, $\begin{cases}a_{11}=\dfrac{5a_{14}-5a_{15}}{4}\\ a_{12}=\dfrac{5a_{14}+3a_{15}}{4}\\ a_{13}=\dfrac{-3a_{14}-a_{15}}{4}\end{cases}$.

Выберем $a_{14}=a_{15}=4$, тогда $a_{11}=0$, $a_{12}=8$, $a_{13}=-4$.

2) Так же выглядит общее решение системы для a_{2i}:

$$\begin{cases}a_{21}=\dfrac{5a_{24}-5a_{25}}{4}\\ a_{22}=\dfrac{5a_{24}+3a_{25}}{4}\\ a_{23}=\dfrac{-3a_{24}-a_{25}}{4}\end{cases}.$$

Выберем свободные неизвестные так, чтобы получить решение, линейно независимое с предыдущим.

Пусть $a_{24}=4$, $a_{25}=0$, тогда $a_{21}=5$, $a_{22}=5$, $a_{23}=-3$.

Итак, используя найденные значения коэффициентов, можно составить линейную однородную систему:

$$\begin{cases}8x_2-4x_3+4x_4+4x_5=0\\ 5x_1+5x_2-3x_3+4x_4=0\end{cases}'$$

фундаментальная система решений которой имеет вид, приведенный в условии задачи.

Ответ: $\begin{cases}8x_2-4x_3+4x_4+4x_5=0\\ 5x_1+5x_2-3x_3+4x_4=0\end{cases}$.

Задача 7.

Найти общее решение неоднородной линейной системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 3x_1 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 5 \end{cases}$$

с помощью фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы.

Указание

Убедитесь в том, что система совместна. Затем составьте соответствующую однородную систему и найдите для нее фундаментальную систему решений. Далее используйте то, что общее решение неоднородной системы линейных уравнений является суммой общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы.

Решение

Убедимся в том, что система совместна:

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right).$$

Итак, $r(A) = r(A_1) = 2$ – система совместна.

Составим по преобразованной матрице однородную систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

и найдем для нее фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 - x_5 \\ 3x_1 = -4x_3 + 3x_4 - 6x_5 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-4x_3 + 3x_4 - 6x_5}{3} \\ x_2 = \dfrac{x_3 - 6x_4 + 3x_5}{3} \end{cases}.$$

Фундаментальная система решений может быть выбрана так:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение неоднородной системы линейных уравнений является суммой общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы.

Теперь найдем какое-нибудь частное решение неоднородной системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ 3x_1 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 5 \end{cases}.$$

Положим $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, тогда $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$. Следовательно,

$X_{частн} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, и общее решение системы имеет вид:

$X = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 + X_{частн}$, где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные.

Ответ: $X = c_1\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Задача 8.

Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 9 \\ x + 4y + z = 4 \\ 2x - 3y + 3z = 11 \end{cases}.$$

Указание

Поменяйте местами 1-е и 2-е уравнения, чтобы в первом уравнении коэффициент при x равнялся единице, а затем исключите x из второго и третьего уравнений.

Решение

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы. Для удобства его применения поменяем местами 1-е и

2-е уравнения, чтобы в первом уравнении коэффициент при x равнялся единице:

$$\begin{cases} x+4y+z=4 \\ 3x-y+2z=9 \\ 2x-3y+3z=11 \end{cases}.$$

Теперь исключим x из второго и третьего уравнений. Для этого вычтем из второго уравнения первое, умноженное на 3, а из третьего – первое, умноженное на 2:

$$\begin{cases} x+4y+z=4 \\ -13y-z=-3 \\ -11y+z=3 \end{cases}.$$

Далее можно легко исключить z из третьего уравнения, если прибавить к нему второе:

$$\begin{cases} x+4y+z=4 \\ -13y-z=-3 \\ -24y=0 \end{cases}.$$

Из последнего уравнения получаем, что $y = 0$. Подставляя это значение в первое и второе уравнения, находим остальные неизвестные: $z = 3$, $x = 1$.

Ответ: $x = 1$, $y = 0$, $z = 3$.

При применении метода Гаусса совсем не обязательно приводить систему к «классическому» треугольному виду:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ b_2y+c_2z=d_2 \\ c_3z=d_3 \end{cases}.$$

Достаточно, чтобы матрица коэффициентов, например, системы трех уравнений с тремя неизвестными содержала два нуля в одном столбце и одновременно два нуля в одной строке, причем один из нулей стоял на пересечении этих строки и столбца.

Задача 9.

Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=1 \\ 2x_1-x_2-3x_4=2 \\ 3x_1-x_3+x_4=-3 \\ 2x_1+2x_2-2x_3+5x_4=-6 \end{cases}.$$

Указание

Исключите x_2 из 2-го и 4-го уравнений, используя 1-е уравнение, а затем вычтите из 3-го уравнения 2-е, чтобы исключить x_3.

Решение

Исключим x_2 из 2-го и 4-го уравнений. Для этого из 2-го уравнения вычтем 1-е, а к 4-му прибавим 1-е, умноженное на 2:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 6x_1 + 3x_4 = -4 \end{cases}.$$

Вычтем из 3-го уравнения 2-е, чтобы исключить x_3:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_4 = -4 \\ 6x_1 + 3x_4 = -4 \end{cases}.$$

Теперь вычтем из 4-го уравнения удвоенное 3-е:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_4 = -4 \\ -3x_4 = 4 \end{cases}.$$

Из последнего уравнения находим $x_4 = -\frac{4}{3}$. Тогда из 3-го уравнения $x_1 = 0$, из 2-го $x_3 = \frac{5}{3}$, из 1-го $x_2 = 2$.

Ответ: $x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = \frac{5}{3},\ x_4 = -\frac{4}{3}.$

2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

2.1. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1.1. *Линейные операции над векторами. Скалярное произведение*

Определение вектора

Пусть даны две точки A и B. Отрезок, соединяющий эти точки, будем называть *направленным*, если указаны начальная и конечная точка отрезка, т.е. на отрезке указано направление.

Вектором называется направленный отрезок. Векторы будем обозначать буквами ***a***, ***b***, ***c***,… или, указывая начальные и конечные точки, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \ldots$.

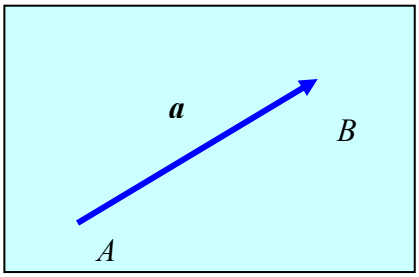


Рис.1

Вектор называется *нулевым*, если начальная и конечная точки совпадают. В этом случае будем писать ***a*** = 0. *Длиной* вектора называется длина соответствующего ему направленного отрезка. Длина обозначается через $|\boldsymbol{a}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$.

Векторы ***a*** и ***b*** называются *коллинеарными* (при этом пишут ***a*** || ***b***), если существует прямая, которой они параллельны. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют равные длины. Иными словами, мы рассматриваем *свободные* векторы, начальные точки которых могут выбираться произвольным образом.

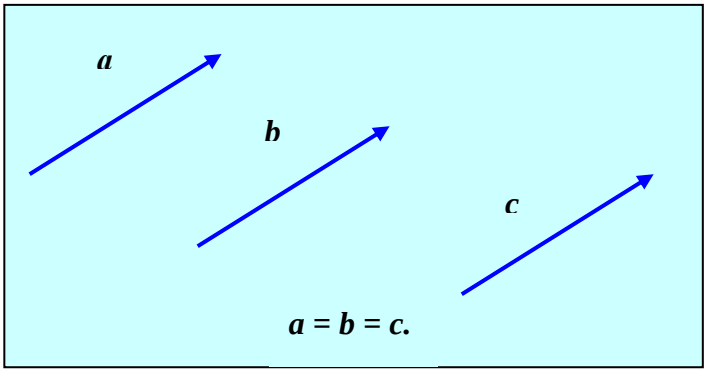


Рис. 2

Линейные операции над векторами

1. Сложение векторов. Пусть даны векторы ***a*** и ***b***. Совместим начальную точку вектора ***b*** с конечной точкой вектора ***a***. Тогда вектор, начальная точка которого совпадает с начальной точкой вектора ***a***, а конечная – с конечной точкой ***b***, называется *суммой векторов* ***a*** + ***b***.

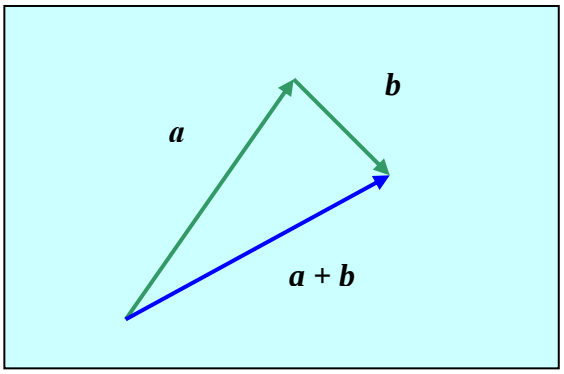


Рис. 3

Совместим начальные точки векторов ***a*** и ***b*** и обозначим эту точку через *O*. Построим параллелограмм *OACB* на сторонах этих векторов. Тогда вектор $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. Тем самым получено эквивалентное определение суммы векторов, называемое *правилом параллелограмма*.

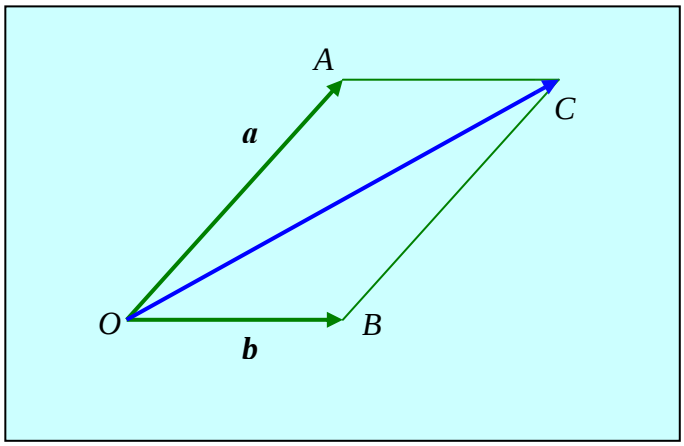


Рис. 4

Из рис. 4 видно, что

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}.$$

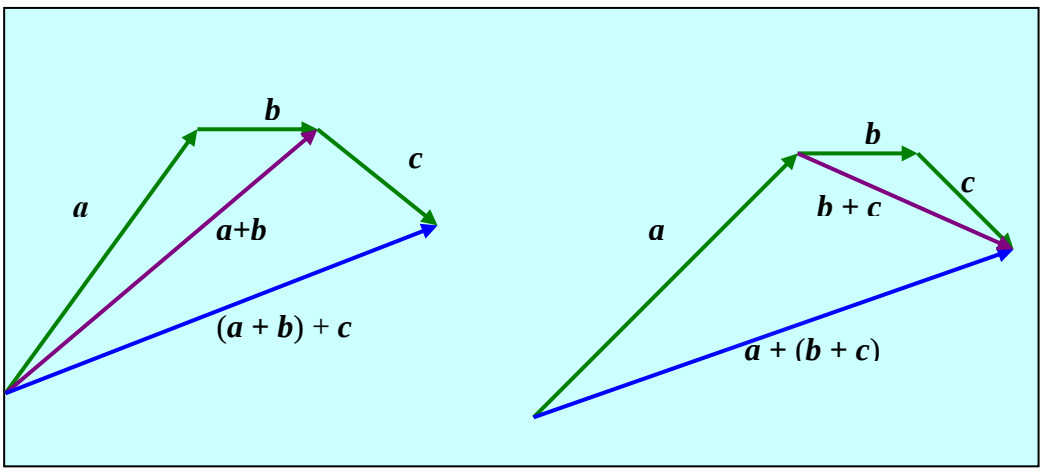


Рис. 5

Таким образом, операция сложения векторов коммутативна:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}.$$

Имеет место также свойство ассоциативности:

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}).$$

2. Умножение вектора на число. *Произведением вектора* $\boldsymbol{a}$ *на число* λ называется вектор $\lambda\boldsymbol{a}$ такой, что:

1. $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$.

2. $\lambda\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{a}$, и оба вектора одинаково направлены, если $\lambda > 0$, и имеют противоположные направления, если $\lambda < 0$.

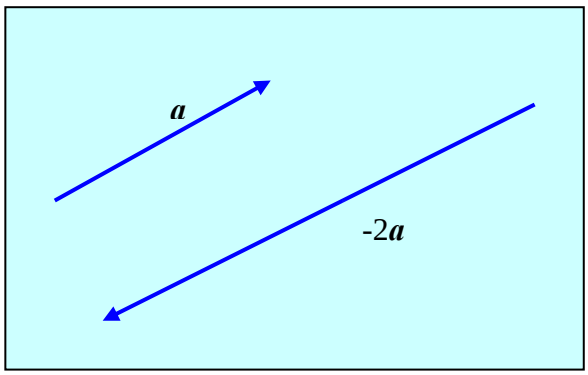


Рис. 6

Таким образом, если $\boldsymbol{a}$ не равен нулю и $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$, то найдется число λ такое, что $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$. Достаточно взять

$$\lambda = \varepsilon \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|},$$

где $\varepsilon = 1$, если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ одинаково направлены, и $\varepsilon = -1$, если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеют противоположные направления.

Отметим основные свойства операции умножения вектора на число, которые непосредственно вытекают из определения этой операции:

1. $(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$.
2. $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.
3. $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$.

3. Вычитание векторов. *Разностью* двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-1)\cdot\boldsymbol{b}.$$

Координаты вектора и точки

Зафиксируем в пространстве некоторую точку O и три взаимно перпендикулярных вектора единичной длины $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$.

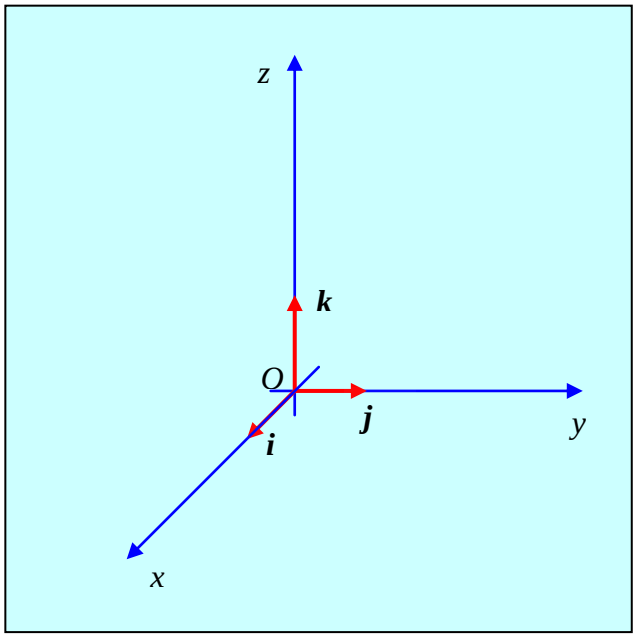


Рис. 7

Совокупность точки O и векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ называется *декартовой прямоугольной системой координат*. Прямые, проходящие через точку O параллельно векторам $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$, называются *координатными осями* и носят названия осей *абсцисс* (Ox), *ординат* (Oy) и *аппликат* (Oz) соответственно.

Пусть задан вектор $\boldsymbol{a}$. Совместим его начальную точку с началом координат O, а через его конечную точку A проведем плоскости, перпендикулярные координатным осям. Пусть эти плоскости пересекают оси Ox, Oy, Oz в точках L, M, N соответственно.

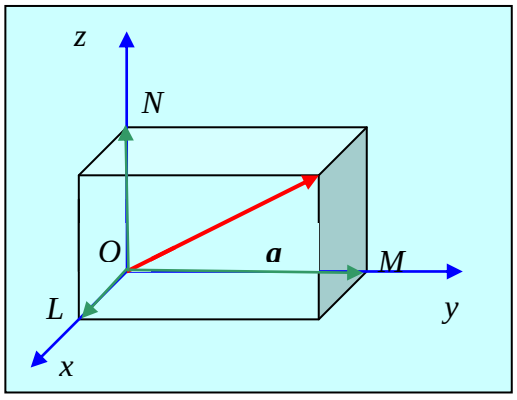


Рис. 8

Нетрудно убедиться, что

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}.$$

Поскольку вектора $\overrightarrow{OL}, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$ коллинеарны векторам $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ соответственно, то найдутся числа x_1, y_1, z_1 такие, что

$$\overrightarrow{OL} = x_1 \vec{i}, \ \overrightarrow{OM} = y_1 \vec{j}, \ \overrightarrow{ON} = z_1 \vec{k}.$$

Следовательно, любой вектор $\boldsymbol{a}$ может быть представлен в виде

$$\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}. \quad (1)$$

Представление (1) единственно. Действительно, если предположить, что наряду с (1) существует другое представление

$$\boldsymbol{a} = x'_1\boldsymbol{i} + y'_1\boldsymbol{j} + z'_1\boldsymbol{k},$$

то, вычитая это равенство из (7.1), получим

$$0 = (x_1 - x'_1)\boldsymbol{i} + (y_1 - y'_1)\boldsymbol{j} + (z_1 - z'_1)\boldsymbol{k}.$$

Если $x_1 \neq x'_1$, то

$$\vec{i} = -\frac{y_1 - y'_1}{x_1 - x'_1}\vec{j} - \frac{z_1 - z'_1}{x_1 - x'_1}\vec{k},$$

что невозможно, т.к. вектор в правой части лежит в плоскости, параллельной осям Oy и Oz, а вектор $\boldsymbol{i}$ перпендикулярен этой плоскости. Следовательно, $x_1 = x'_1$. Аналогично доказывается, что $y_1 = y'_1$ и $z_1 = z'_1$.

Числа x_1, y_1, z_1 в представлении (1) называются *координатами* вектора $\boldsymbol{a}$. Вместе с равенством (1) будет использоваться также запись вида

$$\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1).$$

Радиусом-вектором точки A называется вектор, начало которого совпадает с началом координат O, а конец – с точкой A. *Координатами точки A* называются координаты радиус-вектора точки A. При этом, если $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1, z_1)$, будем писать

$$A = \{x_1, y_1, z_1\}.$$

Линейные операции над векторами в координатах

1. Сложение векторов. Если $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1)$, а $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2). \qquad (2)$$

Доказательство.

Доказательство.

Имеем $\boldsymbol{a} = x_1\,\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\,\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = x_2\,\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\,\boldsymbol{k}$. Поэтому

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = x_1\,\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\,\boldsymbol{k} + x_2\,\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\,\boldsymbol{k} = (x_1 + x_2)\,\boldsymbol{i} + (y_1 + y_2)\,\boldsymbol{j} + (z_1 + z_2)\,\boldsymbol{k}$.

2. Умножение вектора на число. Если $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1)$, то

$$\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda x_1,\ \lambda y_1,\ \lambda z_1). \qquad (3)$$

Доказательство.

Имеем $\boldsymbol{a} = x_1\,\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\,\boldsymbol{k}$. Следовательно,

$$\lambda\boldsymbol{a} = \lambda(x_1\,\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\,\boldsymbol{k}) = \lambda x_1\,\boldsymbol{i} + \lambda y_1\boldsymbol{j} + \lambda z_1\,\boldsymbol{k}.$$

Из формул (2) и (3) вытекает, что

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).$$

Пример 1. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $B = \{x_2, y_2, z_2\}$. Имеем (см. рис. 9)

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}.$$

Отсюда

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

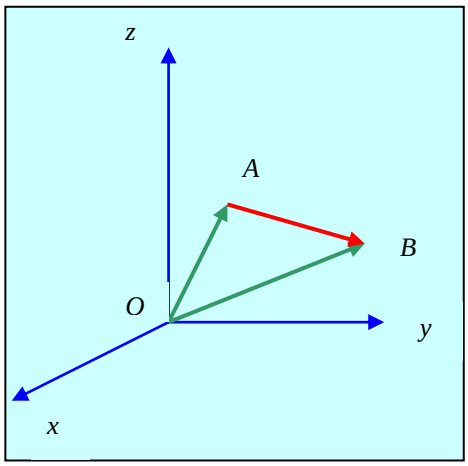


Рис. 9

Проекция вектора на ось

Прямую с заданным на ней направлением будем называть *осью*. Пусть дан вектор $\overrightarrow{AB}$ и ось l. Обозначим через C и D проекции точек A и B на ось l (см. рис. 7.10). Тогда *проекцией вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на ось* l $\text{пр}_l \overrightarrow{AB}$ называется величина $|\overrightarrow{CD}|$, если направление оси l совпадает с направлением вектора $\overrightarrow{CD}$, и $-|\overrightarrow{CD}|$ в противном случае.

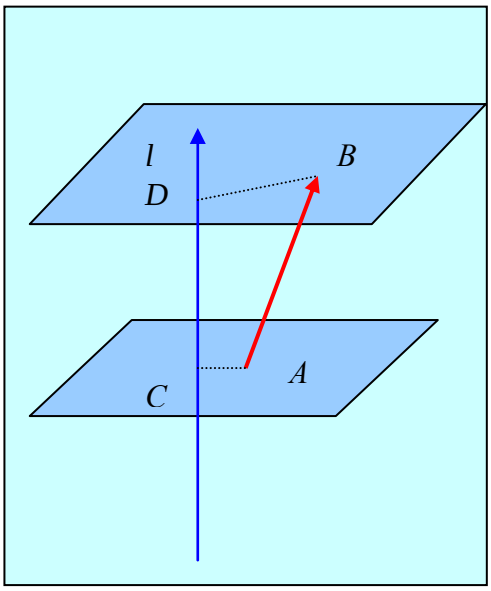


Рис. 10

Если обозначить через α угол между вектором $\overrightarrow{AB}$ и осью l, то

(4)

$$\text{пр}_l \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos\alpha.$$

Из определения координат вектора вытекает, что если $\boldsymbol{a} = (x, y, z)$, то

(5)

$$x = \text{пр}_{Ox}\boldsymbol{a},$$
$$y = \text{пр}_{Oy}\boldsymbol{a}$$
$$z = \text{пр}_{Oz}\boldsymbol{a}.$$

Одним из основных свойств проекции вектора на ось является следующее свойство:

$$\text{пр}_l(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \text{пр}_l \boldsymbol{a} + \text{пр}_l \boldsymbol{b}.$$

(6)

Доказательство.

Введем декартову систему координат так, чтобы ось Ox совпала с осью l. Тогда, если $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$. Из равенств (5) имеем

$$x_1 = \text{пр}_l \boldsymbol{a},\ \ x_2 = \text{пр}_l \boldsymbol{b},\ x_1 + x_2 = \text{пр}_l (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}).$$

Отсюда вытекает справедливость равенства (6).

Через $\text{пр}_c \boldsymbol{a}$ будем обозначать проекцию вектора $\boldsymbol{a}$ на ось, задаваемую вектором $\boldsymbol{c}$.

Пусть дан произвольный вектор $\boldsymbol{a} \neq 0$. Его *ортом* называется вектор единичной длины, коллинеарный $\boldsymbol{a}$ и имеющий с ним одинаковое направление. Из определения умножения вектора на число получаем, что вектор

$$\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$$

является ортом вектора $\boldsymbol{a}$.

Пусть $\boldsymbol{a} = (x, y, z) \neq 0$. Обозначим через α, β и γ углы, образованные осями Ox, Oy и Oz с вектором $\boldsymbol{a}$. Тогда из (4) и (5) вытекает, что

$$x = |\boldsymbol{a}| \cos \alpha,$$
$$y = |\boldsymbol{a}| \cos \beta,$$
$$z = |\boldsymbol{a}| \cos \gamma,$$

т.е.

$$\boldsymbol{a} = (|\boldsymbol{a}| \cos \alpha, |\boldsymbol{a}| \cos \beta, |\boldsymbol{a}| \cos \gamma) = |\boldsymbol{a}| (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{e_a} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma). \qquad (7)$$

Величины $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора $\boldsymbol{a}$.

Скалярное произведение

Пусть даны векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Обозначим через φ угол между этими векторами. *Скалярным произведением* векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется величина

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos \varphi.$$

Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называют *ортогональными* (при этом пишут $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$), если угол между ними прямой. Нулевой вектор считается ортогональным любому. Из определения скалярного произведения вытекает, что

$$\boxed{\boldsymbol{ab} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}}$$

(символом $\Leftrightarrow$ обозначается эквивалентность утверждений).

Остановимся на основных свойствах скалярного произведения.

1. $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$.
2. $(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{ab})$.
3. $\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\ \text{пр}_{\boldsymbol{a}}\ \boldsymbol{b}$.
4. $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac}$.

Доказательство.

В силу свойства 3 и (6)

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{a}|\ \text{пр}_{\boldsymbol{a}}\ (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{a}|(\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\ \boldsymbol{b} + \text{пр}_{\boldsymbol{a}}\ \boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{a}|\ \text{пр}_{\boldsymbol{a}}\ \boldsymbol{b} + |\boldsymbol{a}|\ \text{пр}_{\boldsymbol{a}}\ \boldsymbol{c} = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac}.$$

5. *Скалярным квадратом* вектора $\boldsymbol{a}$ называется величина $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{aa}$. Из определения скалярного произведения получаем

$$\boldsymbol{a}^2 = |\boldsymbol{a}|^2. \qquad (8)$$

6. Если $\boldsymbol{a} = (x_1,y_1,z_1)$ и $\boldsymbol{b} = (x_2,y_2,z_2)$, то

$$\boxed{\boldsymbol{ab} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.}$$

Доказательство.

Имеем

$$\boldsymbol{ab} = (x_1\,\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\,\boldsymbol{k})(\,x_2\,\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\,\boldsymbol{k}) = x_1x_2\,\boldsymbol{i}^2 + y_1x_2\boldsymbol{ji} + z_1x_2\,\boldsymbol{ki} + x_1y_2\,\boldsymbol{ij} +$$
$$+ y_1y_2\boldsymbol{j}^2 + z_1y_2\,\boldsymbol{kj} + x_1z_2\,\boldsymbol{ik} + y_1z_2\boldsymbol{jk} + z_1z_2\,\boldsymbol{k}^2.$$

Поскольку $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{ik} = \boldsymbol{jk} = 0$, $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = 1$, получаем

$$\boldsymbol{ab} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

7. Если $\boldsymbol{a} = (x,y,z)$, то

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.}$$

Доказательство.

Из свойств 5 и 6 получаем

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\vec{a}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Из равенства (7) и свойства 7 вытекает, что направляющие косинусы связаны соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

8. Если $\boldsymbol{a} = (x_1,y_1,z_1)$ и $\boldsymbol{b} = (x_2,y_2,z_2)$, а φ – угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, то

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Доказательство.

Из свойств 6 и 7 получаем

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

9. Если $\boldsymbol{a} = (x_1,y_1,z_1)$ и $\boldsymbol{b} = (x_2,y_2,z_2)$, то

$$\text{пр}_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Доказательство.

Обозначим через φ угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Тогда из свойства 8 получаем

$$np_b a = |\vec{a}|\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Рассмотрим выражение $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2$. Имеем

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^2.$$

Пользуясь равенством (8) и определением скалярного произведения, получаем

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{b}|^2, \qquad (9)$$

где φ – угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Рассмотрим треугольник с вершинами в точках A, B и C.

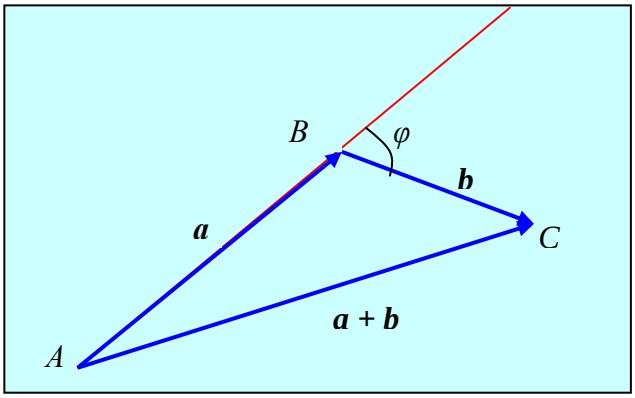


Рис. 11

Пусть $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BC}$. Тогда $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. Положим $\alpha = \angle ABC$. В силу того, что $\alpha = \pi - \varphi$, $\cos\alpha = -\cos\varphi$. Поэтому из (9) получаем известную теорему косинусов:

$$|AC|^2 = |AB|^2 - 2|AB|\,|AC|\cos\alpha + |BC|^2 .$$

Пример 2. Даны координаты вершин треугольника $A = \{1, 1, 2\}$, $B = \{1, 6, 3\}$ и $C = \{4, 5, 2\}$. Найти координаты проекции точки B на сторону AC.

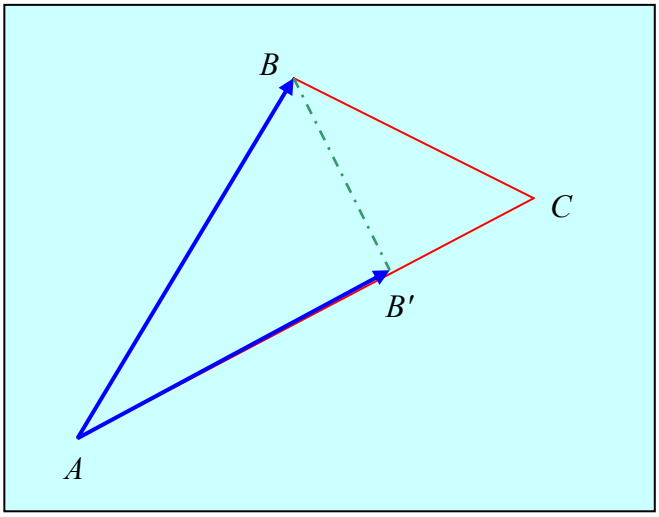


Рис. 12

Обозначим проекцию точки B на сторону AC через B'. Тогда

$$\overrightarrow{AB'} = e_{\overrightarrow{AC}} np_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{|\overrightarrow{AC}|}\overrightarrow{AC}\,\frac{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}.$$

Имеем

$$\overrightarrow{AB} = (0,5,1),\ \overrightarrow{AC} = (3,4,0),\ |\overrightarrow{AC}| = 5,\ \overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} = 20.$$

Поэтому

$$\overrightarrow{AB'} = \frac{4}{5}(3,4,0).$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB'} = (1,1,2) + \frac{4}{5}(3,4,0) = \left(\frac{17}{5}, \frac{21}{5}, 2\right).$$

Отсюда

$$B' = \frac{17}{5}, \frac{21}{5}, 2\ .$$

Упражнение 1.

В треугольнике с вершинами в точках A = {1, -2, 3},
B = {2, -2, 3} и C = {2,0,3} найти угол между медианой, проведенной из вершины A, и стороной AB.

Решение

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = (2-1, -2+2, 3-3) = (1,0,0).$$

Пусть точка M – середина стороны BC, тогда

$$M = \frac{2+2}{2}, \frac{-2+0}{2}, \frac{3+3}{2} = 2,-1,3 \ , \quad \overrightarrow{AM} = 1,1,0 \ .$$

Найдем косинус искомого угла:

$$\cos\varphi = \frac{1+0+0}{1\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «*Линейные операции над векторами. Скалярное произведение*»

Задача 1.

Даны векторы $\boldsymbol{a}$ = (-2; 3; 5) и $\boldsymbol{b}$ = (4; -1; 7). Найти координаты вектора $3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$.

Указание

При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число, при сложении векторов складываются их соответствующие координаты.

Решение

$3\boldsymbol{a}$ = (-6; 9; 15), $-2\boldsymbol{b}$ = (-8; 2; -14).

$3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{a} + (-2\boldsymbol{b})$ = (-6 - 8; 9 + 2; 15 – 14) = (-14; 11; 1).

Ответ: $3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$ = (-14; 11; 1).

Задача 2.

При каких α и β векторы $\boldsymbol{a}$ = (α; 3; -5) и $\boldsymbol{b}$ = (1; -2; β) коллинеарны?

Указание

Координаты коллинеарных векторов пропорциональны.

Решение

Если $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$, то $\frac{\alpha}{1} = \frac{3}{-2} = \frac{-5}{\beta}$. Отсюда:

1) $\frac{\alpha}{1} = \frac{3}{-2} \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{2}$ 2) $\frac{3}{-2} = \frac{-5}{\beta} \Rightarrow \beta = \frac{10}{3}$.

Ответ: $\alpha = -\frac{3}{2}, \beta = \frac{10}{3}$..

Задача 3.
Найти направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{a}$ = {-2; -1; 2}.

Указание

Направляющие косинусы являются координатами орта (единичного вектора) данного направления.

Решение

Найдем модуль вектора $\boldsymbol{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3.$$

Разделив все координаты вектора $\boldsymbol{a}$ на его модуль, получим координаты орта:

$$\vec{e}_a = -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}.$$

Следовательно,

$$\cos\alpha = -\frac{2}{3}, \cos\beta = -\frac{1}{3}, \cos\gamma = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\cos\alpha = -\frac{2}{3}, \cos\beta = -\frac{1}{3}, \cos\gamma = \frac{2}{3}$.

Задача 4.
Разложить вектор $\boldsymbol{d}$ = { -6; 0; 13} по базису из векторов $\boldsymbol{a}$ = {2; -1; 3}, $\boldsymbol{b}$ = {1; 1; -1}, $\boldsymbol{c}$ = {-3; 1; 2}.

Указание

Требуется найти такие числа α, β, γ, что $\boldsymbol{d} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}$. Задайте координаты вектора $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}$ и приравняйте их соответствующим координатам вектора $\boldsymbol{d}$.

Решение

Требуется найти такие числа α, β, γ, что $\boldsymbol{d} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}$. Зададим координаты векторов $\alpha\boldsymbol{a}$, $\beta\boldsymbol{b}$, $\gamma\boldsymbol{c}$: $a\boldsymbol{a}$ = {2α; -α; 3α},

$\beta\boldsymbol{b}$ = {β; β; -β}, $\gamma\boldsymbol{c}$ = {-3γ; γ; 2γ}.

Тогда $\alpha\boldsymbol{a}$ + $\beta\boldsymbol{b}$ + $\gamma\boldsymbol{c}$ = {2α + β- 3γ; -α + β+ γ; 3α - β+ 2γ}, причем координаты этого вектора должны равняться соответствующим координатам вектора ***d***. Приравнивая эти координаты, получаем систему уравнений для определения α, β, γ:

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta-3\gamma=-6 \\ -\alpha+\beta+\gamma=0 \\ 3\alpha-\beta+2\gamma=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta-3\gamma=-6 \\ -3\alpha+4\gamma=6 \\ 5\alpha-\gamma=7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta-3\gamma=-6 \\ 17\alpha=34 \\ 5\alpha-\gamma=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=-1. \\ \gamma=3 \end{cases}$$

Следовательно, ***d*** = 2***a*** – ***b*** + 3***c***.

Ответ: ***d*** = 2***a*** – ***b*** + 3***c***.

Задача 5.

Для векторов ***a*** = {1; -2; 3}, ***b*** = {-1; 1; -2}, ***c*** = {3; 2; 1}, ***d*** = { 15; 7; 4} найти такие числа α, β, γ, чтобы векторы $\alpha\boldsymbol{a}$, $\beta\boldsymbol{b}$, $\gamma\boldsymbol{c}$ и ***d*** образовали замкнутую ломаную линию, если начало каждого последующего вектора совместить с концом предыдущего.

Указание

Для выполнения условия задачи сумма векторов $\alpha\boldsymbol{a}$ + $\beta\boldsymbol{b}$ + $\gamma\boldsymbol{c}$ + ***d*** должна равняться нулю.

Найдите координаты вектора $\alpha\boldsymbol{a}$ + $\beta\boldsymbol{b}$ + $\gamma\boldsymbol{c}$ + ***d*** и приравняйте нулю каждую из них.

Решение

Для выполнения условия задачи сумма векторов $\alpha\boldsymbol{a}$ + $\beta\boldsymbol{b}$ + $\gamma\boldsymbol{c}$ + ***d*** должна равняться нулю.

Найдем координаты вектора $\alpha\boldsymbol{a}$ + $\beta\boldsymbol{b}$ + $\gamma\boldsymbol{c}$ + ***d***:

$\alpha\boldsymbol{a}$ + $\beta\boldsymbol{b}$ + $\gamma\boldsymbol{c}$ + ***d*** = {α – β + 3γ + 15; 2α + β + 2γ + 7; 3α - 2β + γ +4}.

Следовательно, α, β и γ,должны быть решением системы уравнений

$$\begin{cases} \alpha-\beta+3\gamma+15=0 \\ 2\alpha+\beta+2\gamma+7=0 \\ 3\alpha-2\beta+\gamma+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha-\beta+3\gamma+15=0 \\ 3\beta-4\gamma-23=0 \\ \beta-8\gamma-41=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha-\beta+3\gamma+15=0 \\ 3\beta-4\gamma-23=0 \\ -5\beta+5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=1 \\ \gamma=-5 \end{cases}.$$

Ответ: $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = -5$.

Задача 6.
Выяснить, является ли система векторов $\boldsymbol{a}$ = {2; -3; 1}, $\boldsymbol{b}$ = {3; -1; 5}, $\boldsymbol{c}$ = {1; -4; 3} линейно зависимой или линейно независимой.

Указание

Система векторов называется линейно независимой, если равенство

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} = 0$$

верно только при $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Решение

Координаты вектора $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}$ имеют вид:

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} = \{2\alpha + 3\beta + \gamma;\ -3\alpha - \beta - 4\gamma;\ \alpha + 5\beta + 3\gamma\}.$$

Вычислим главный определитель Δ системы уравнений

$$\begin{cases} 2\alpha+3\beta+\gamma=0 \\ -3\alpha-\beta-4\gamma=0 \\ \alpha+5\beta+3\gamma=0 \end{cases}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 17 - 3\cdot(-5) + 1\cdot(-4) = 15 \neq 0.$$

По правилу Крамера система имеет единственное решение, но для однородной системы всегда существует нулевое решение ($\alpha = \beta = \gamma = 0$). Поскольку других решений нет, данная система векторов линейно независима.

Ответ: система векторов линейно независима.

Задача 7.
Найти координаты какого-либо вектора, направленного по биссектрисе угла между векторами $\boldsymbol{a}$ = (-4; 3; 0) и $\boldsymbol{b}$ = (12; -15; 16).

Указание

Диагональ параллелограмма является биссектрисой угла между сторонами только в том случае, если этот параллелограмм – ромб. Следовательно, искомым вектором можно считать сумму двух векторов равной длины, коллинеарных соответственно векторам ***a*** и ***b***.

Решение

Вектор ***a*** + ***b*** *направлен по диагонали параллелограмма, построенного на векторах* ***a*** *и* ***b*** *как на смежных сторонах и выходящей из общего начала векторов* ***a*** *и* ***b***.

Диагональ параллелограмма является биссектрисой угла между сторонами только в том случае, если этот параллелограмм – ромб. Следовательно, искомым вектором можно считать сумму двух векторов равной длины, коллинеарных соответственно векторам ***a*** и ***b***.

$|\vec{a}| = \sqrt{16+9} = 5;\ \ |\vec{b}| = \sqrt{144+225+256} = \sqrt{625} = 25.$

Следовательно, $|5\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$. Значит, параллелограмм со сторонами, совпадающими с векторами $5\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, является ромбом, поэтому вектор $5\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ будет иметь заданное направление.

$$5\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (-20 + 12;\ 15 - 15;\ 0 + 16) = (-8;\ 0;\ 16).$$

Ответ: (-8; 0; 16).

Задача 8.

При каких значениях x, y, z точки $A(x;\ -1;\ 3)$, $B(5;\ -4;\ z)$, $C(-2;\ y;\ 9)$, $D(-5;\ 1;\ 7)$ являются вершинами параллелограмма?

Указание

Для выполнения условия задачи требуется коллинеарность векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Решение

Для выполнения условия задачи требуется коллинеарность векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Найдем координаты этих векторов:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A\} = \{5 - x;\ -3;\ z - 3\};$$

$$\overrightarrow{DC} = \{x_C - x_D;\ y_C - y_D;\ z_C - z_D\} = \{3;\ y - 1;\ 2\}.$$

$$\overrightarrow{AB} \,||\, \overrightarrow{DC} \Rightarrow \frac{5-x}{3} = \frac{-3}{y-1} = \frac{z-3}{2}.$$

$$\overrightarrow{AD} = \{-5 - x;\ 2;\ 4\};$$
$$\overrightarrow{BC} = \{-7;\ y + 4;\ 9 - z\}.$$
$$\overrightarrow{AD} \,||\, \overrightarrow{BC} \Rightarrow \frac{-5 - x}{-7} = \frac{2}{y + 4} = \frac{4}{9 - z}.$$

Из последней пропорции получаем, что $z = 1 - 2y$. Тогда

$$\frac{-3}{y - 1} = \frac{1 - 2y - 3}{2} \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2.$$

1) $y = 2;\ z = 1 - 4 = -3;\ \frac{5 - x}{3} = \frac{-3}{2 - 1} = -3 \Rightarrow x = 14.$

Но при этих значениях неизвестных

$$\frac{-5 - x}{-7} = \frac{-5 - 14}{-7} = \frac{19}{5} \neq \frac{2}{y + 4} = \frac{1}{3}.$$

2) $y = -2;\ z = 1 + 4 = 5;\ \frac{5 - x}{3} = \frac{-3}{-2 - 1} = 1 \Rightarrow x = 2.$

$$\frac{-5 - x}{-7} = \frac{-5 - 2}{-7} = 1 = \frac{2}{y + 4} -$$

условие задачи выполнено.

Ответ: $x = 2$, $y = -2$, $z = 5$.

Задача 9.

Найти скалярное произведение $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})(2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$, если $|\boldsymbol{a}| = 2$, $|\boldsymbol{b}| = 3$, а угол между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен 120^o.

Указание

Используйте определение скалярного произведения:

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Решение

Используем свойства скалярного произведения:

$(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})(2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = 2\boldsymbol{aa} - 2\boldsymbol{ba} + \boldsymbol{ab} - \boldsymbol{bb} = 2|\boldsymbol{a}|^2 - \boldsymbol{ab} - |\boldsymbol{b}|^2$.

По определению скалярного произведения

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\varphi = 2 \cdot 3 \cdot (-½) = -3.$$

Тогда $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})(2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = 2 \cdot 4 - (-3) - 9 = 8$.

Ответ: $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})(2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = 8$.

Задача 10.

Известно, что $|\boldsymbol{a}| = 3$, $|\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{c}| = 1$ и $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = 0$. Найти $\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{bc} + \boldsymbol{ca}$.

Указание

Вектор $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ – нулевой, поэтому его скалярное произведение с любым вектором равно нулю. Умножьте скалярно вектор $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ сначала на $\boldsymbol{a}$, затем на $\boldsymbol{b}$ и на $\boldsymbol{c}$.

Решение

Вектор $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ – нулевой, поэтому его скалярное произведение с любым вектором равно нулю. Умножим скалярно вектор $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ сначала на $\boldsymbol{a}$, затем на $\boldsymbol{b}$ и на $\boldsymbol{c}$. Получим:

$$\begin{cases} \vec{a}\vec{a} + \vec{b}\vec{a} + \vec{c}\vec{a} = 0 \\ \vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{b} + \vec{c}\vec{b} = 0 \\ \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{c} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{a}|^2 + \vec{a}\vec{b} + \vec{c}\vec{a} = 0 \\ \vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2 + \vec{b}\vec{c} = 0 \\ \vec{c}\vec{a} + \vec{b}\vec{c} + |\vec{c}|^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 + \vec{a}\vec{b} + \vec{c}\vec{a} = 0 \\ \vec{a}\vec{b} + 1 + \vec{b}\vec{c} = 0 \\ \vec{c}\vec{a} + \vec{b}\vec{c} + 1 = 0 \end{cases}.$$

Сложим левые и правые части полученных равенств:
$11 + 2\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{b}\boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{c}\boldsymbol{a} = 0$, откуда $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{c}\boldsymbol{a} = -5{,}5$.

Ответ: $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{c}\boldsymbol{a} = -5{,}5$.

Задача 11.

Даны векторы $\boldsymbol{a} = \{2; -3; 1\}$ и $\boldsymbol{b} = \{-1; 2; 1\}$. Найти скалярное произведение $(3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b})$.

Указание

Найдите координаты векторов $3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$ или используйте свойства скалярного произведения.

Решение

1-й способ.
Найдем координаты векторов $3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$:
$3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \{3\cdot 2 + 1; 3\cdot(-3) - 2; 3\cdot 1 - 1\} = \{7; -11; 2\}$;
$\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} = \{2 + 2\cdot(-1); -3 + 2\cdot 2; 1 + 2\cdot 1\} = \{0; 1; 3\}$.
Тогда $(3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}) = 7\cdot 0 - 11\cdot 1 + 2\cdot 3 = -5$.

2-й способ.
Используем свойства скалярного произведения:
$(3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}) = 3\boldsymbol{a}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{a} + 6\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{b}\boldsymbol{b} = 3|\boldsymbol{a}|^2 + 5\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} - 2|\boldsymbol{b}|^2$.
$|\boldsymbol{a}|^2 = 2^2 + (-3)^2 + 1^2 = 14$;
$|\boldsymbol{b}|^2 = (-1)^2 + 2^2 + 1^2 = 6$;
$\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = 2\cdot(-1) - 3\cdot 2 + 1\cdot 1 = -7$;
$(3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}) = 3\cdot 14 + 5\cdot(-7) - 2\cdot 6 = -5$.

Ответ: $(3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}) = -5$.

Задача 12.
Найти косинус угла между векторами $\boldsymbol{a}$ = {2; -2; -1} и $\boldsymbol{b}$ = {-6; 3; 2}.

Указание
Используйте формулу, выражающую косинус угла между векторами через их скалярное произведение.

Решение

$$|\vec{a}| = \sqrt{4+4+1} = 3;$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{36+9+4} = 7;$$
$$\vec{a}\vec{b} = 2(-6) - 2\cdot 3 - 1\cdot 2 = -20;$$
$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{-20}{3\cdot 7} = -\frac{20}{21}.$$

Ответ: $-\frac{20}{21}$.

Задача 13.
Найти вектор $\boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{a}$ = {2; -2; 3}, $\boldsymbol{b} \parallel \boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{ab}$ = -51.

Указание
Координаты вектора $\boldsymbol{b}$ пропорциональны координатам $\boldsymbol{a}$. Если k – коэффициент пропорциональности, то $\boldsymbol{b}$ = {2k; -2k; 3k}.

Решение
Координаты вектора $\boldsymbol{b}$ пропорциональны координатам $\boldsymbol{a}$. Если k – коэффициент пропорциональности, то $\boldsymbol{b}$ = {2k; -2k; 3k}.
Тогда $\boldsymbol{ab}$ = 2·2k – 2(-2k) + 3·3k = 17k = -51, откуда k = -3, $\boldsymbol{b}$ = {-6; 6; -9}.

Ответ: $\boldsymbol{b}$ = {-6; 6; -9}.

Задача 14.
Известно, что |$\boldsymbol{a}$| = 2, |$\boldsymbol{b}$| = 7. Найти значения k, при которых векторы $\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} - k\boldsymbol{b}$ перпендикулярны.

Указание
Если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю.

Решение
Если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю.

$$(\vec{a}+k\vec{b})(\vec{a}-k\vec{b})=\vec{a}\vec{a}+k\vec{b}\vec{a}-k\vec{a}\vec{b}-k^2\vec{b}\vec{b}=$$

$$=|\vec{a}|^2-k^2|\vec{b}|^2=0\Rightarrow k^2=\frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{b}|^2}=\frac{4}{9},\ k=\pm\frac{2}{7}.$$

Ответ: $k=\pm\frac{2}{7}$.

Задача 15.
Найти проекцию вектора ***a*** = {7; 0; -5} на ось, образующую с координатными осями *Ox* и *Oy* углы 60^o и 45^o, а с осью *Oz* – тупой угол γ.

Указание

Используйте свойство направляющих косинусов:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

Решение

Найдем $\cos\gamma$: $\cos^2 60^o+\cos^2 45^o+\cos^2\gamma=1$,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\cos^2\gamma=1,\cos^2\gamma=\frac{1}{4},$$

$$\cos\gamma<0\Rightarrow\cos\gamma=-\frac{1}{2}.$$

Тогда проекция ***a*** на заданную ось равна:

$$x_a\cos\alpha+y_a\cos\beta+z_a\cos\gamma=7\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=6.$$

Ответ: 6.

2.1.2. *Векторное и смешанное произведения*

Векторное произведение

Векторным произведением векторов ***a*** и ***b*** называется вектор [***a,b***] такой, что:

1. $|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi$, где φ – угол между векторами ***a*** и ***b***.
2. $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\perp\boldsymbol{a}$, $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\perp\boldsymbol{b}$.
3. Вектор [***a,b***] направлен так, что из конца этого вектора кратчайший поворот от вектора ***a*** к вектору ***b*** происходит против часовой стрелки.

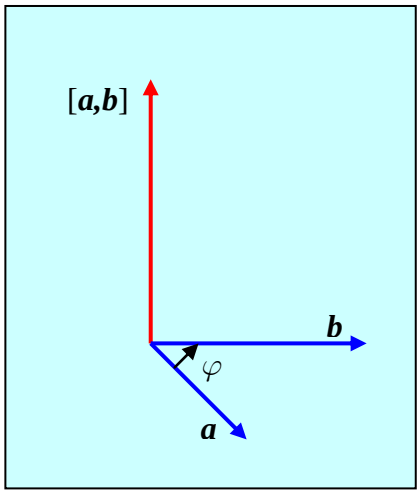


Рис. 1

Из п.1 определения векторного произведения вытекает, что

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}.$$

Векторное произведение обладает следующими свойствами:

1. $|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]| = S_{\boldsymbol{ab}}$, где $S_{\boldsymbol{ab}}$ – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Доказательство.

Если φ - угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, то (см. рис. 2)

$$S_{\mathbf{ab}} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\varphi = |[\mathbf{a},\mathbf{b}]|.$$

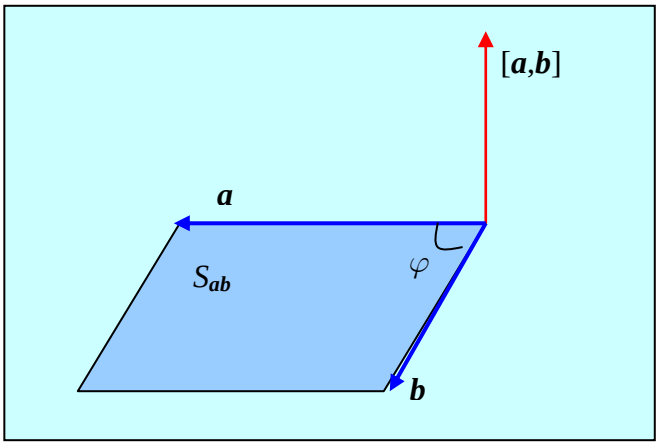


Рис.2

2. $|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]| = -|[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}]|$.
3. $|[\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]| = \lambda|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]|$.

Числовой множитель можно выносить и из второго множителя. Действительно,

$$|[\boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{b}]| = -|[\lambda\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}]| = -\lambda|[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}]| = \lambda|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]|.$$

4. $[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$.

Доказательство этого свойства будет дано в следующем пункте.

Пример 1. Вычислим произведение $[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}]$. Пользуясь тем, что $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}] = 0$ (как произведение коллинеарных векторов), будем иметь:

$$[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}] - [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] = 2[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}].$$

Отсюда

$$S_{\boldsymbol{ab}} = \tfrac{1}{2}\,|[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}]| = \tfrac{1}{2}\,|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\sin\alpha,$$

где α – угол между векторами $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

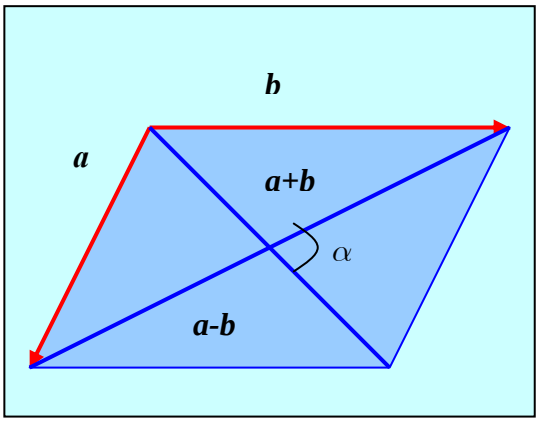


Рис. 3

Тем самым доказано, что площадь параллелограмма равна половине произведения длин диагоналей на синус угла между ними.

Смешанное произведение

Смешанным произведением трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ называется величина

$$\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$$

(скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$).

Векторы называются *компланарными*, если существует плоскость, параллельная им.

Из определения векторного произведения вытекает, что векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарны в том и только в том случае, если $\boldsymbol{a} \perp [\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$. Тем самым

$$\boldsymbol{abc} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \text{ компланарны.}$$

Тройка некомпланарных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ называется *правой*, если угол меду векторами $\boldsymbol{a}$ и $[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ – острый. В противном случае тройка называется *левой*. Множество всех систем декартовых прямоугольных координат распадается на два класса. Один класс – правые системы координат, в которых тройка базисных векторов $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ – правая, другой класс – левые системы координат, в которых тройка базисных векторов $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ – левая.

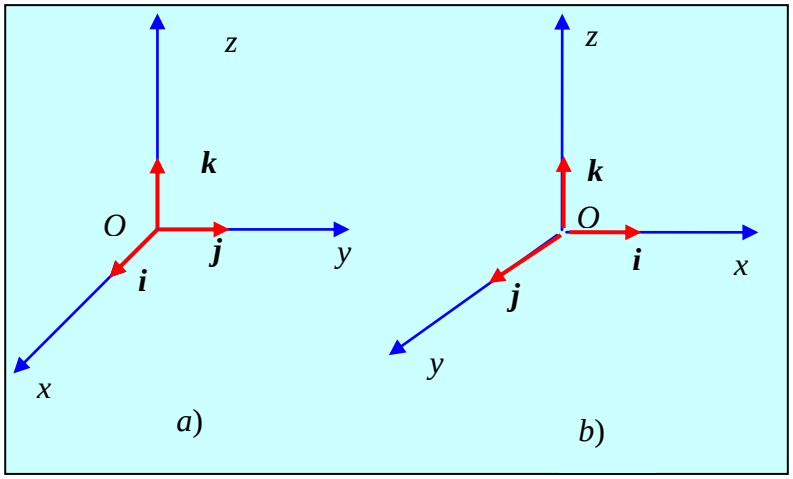


Рис. 4

На рис. 4 *a*) – правая система координат, а *b*) – левая система координат.

Смешанное произведение обладает следующими свойствами:

1. Для некомпланарных векторов

$$\mathbf{abc} = \begin{cases} V_{abc}, & \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \ - \ \textit{правая тройка}, \\ -V_{abc}, & \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \ - \ \textit{левая тройка}, \end{cases}$$

где $V_{\boldsymbol{abc}}$ – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

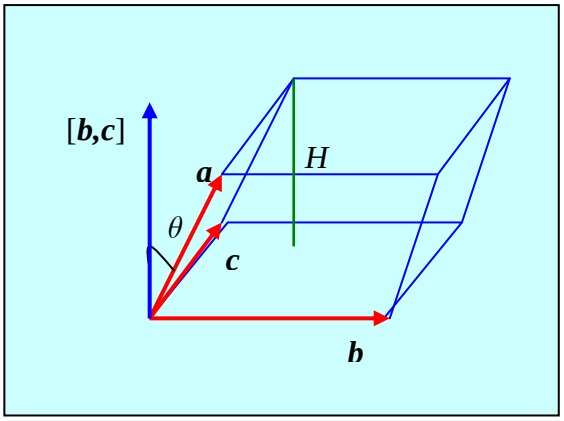


Рис. 5

Доказательство.
Объем параллелепипеда, построенного на векторах ***a***, ***b*** и ***c***, равен произведению площади основания $|[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]|$ на высоту $H = |\boldsymbol{a}||\cos\theta|$, где θ - угол между векторами ***a*** и $[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ (см. рис. 8.5). Поэтому

$$V = |[\mathbf{b},\mathbf{c}]\,\|\,\mathbf{a}\,\|\cos\theta| = |\,\mathbf{abc}\,|.$$

Знак смешанного произведения совпадает со знаком $\cos\theta$, который положителен, если тройка правая, и отрицателен в противном случае.

2. Для любых векторов ***a***, ***b*** и ***c***

$$\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{bca} = \boldsymbol{cab} = -\boldsymbol{acb} = -\boldsymbol{cba} = -\boldsymbol{bac}.$$

Доказательство.
Из предыдущего свойства вытекает, что при перестановке сомножителей в смешанном произведении может измениться лишь знак произведения. Остается заметить, что тройки, получаемые по схеме из рис. 8.6 (начиная с любого вектора), имеют одинаковую ориентацию. При движении по этой схеме в противоположном направлении ориентация меняется.

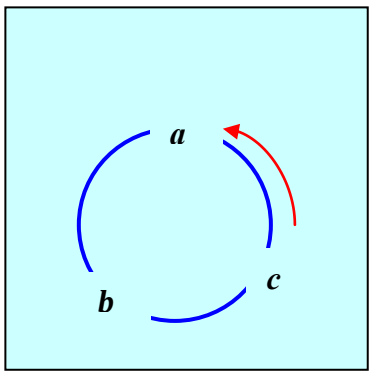


Рис. 6

3. $(\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{bc} = \lambda_1\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{bc} + \lambda_2\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{bc}$.

Доказательство.
Пользуясь свойствами скалярного произведения, получаем:

$$(\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2)\mathbf{bc} = (\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2)[\mathbf{b},\mathbf{c}] =$$
$$= \lambda_1\mathbf{a}_1[\mathbf{b},\mathbf{c}] + \lambda_2\mathbf{a}_2[\mathbf{b},\mathbf{c}] = \lambda_1\mathbf{a}_1\mathbf{bc} + \lambda_2\mathbf{a}_2\mathbf{bc}.$$

Аналогичное свойство имеет место для остальных множителей:

$$\boldsymbol{a}(\lambda_1\boldsymbol{b}_1 + \lambda_2\boldsymbol{b}_2)\boldsymbol{c} = \lambda_1\boldsymbol{ab}_1\boldsymbol{c} + \lambda_2\boldsymbol{ab}_2\boldsymbol{c},$$

$$\boldsymbol{ab}(\lambda_1\boldsymbol{c}_1 + \lambda_2\boldsymbol{c}_2) = \lambda_1\boldsymbol{abc}_1 + \lambda_2\boldsymbol{abc}_2.$$

Доказательство.
Имеем

$$\mathbf{a}(\lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2)\mathbf{c} = -(\lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2)\mathbf{ac} =$$
$$= -\lambda_1\mathbf{b}_1\mathbf{ac} - \lambda_2\mathbf{b}_2\mathbf{ac} = \lambda_1\mathbf{ab}_1\mathbf{c} + \lambda_2\mathbf{ab}_2\mathbf{c}.$$

Аналогично доказывается второе равенство.

Докажем теперь свойство 4 векторного произведения, т.е. равенство
$[\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$.

Доказательство.
Из свойства 3 смешанного произведения вытекает, что для любого вектора $\boldsymbol{e}$
$$\mathbf{e}[\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c}] = \mathbf{e}(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{eac} + \mathbf{ebc} =$$
$$= \mathbf{e}[\mathbf{a},\mathbf{c}] + \mathbf{e}[\mathbf{b},\mathbf{c}] = \mathbf{e}([\mathbf{a},\mathbf{c}] + [\mathbf{b},\mathbf{c}]).$$

Выбирая в качестве $\boldsymbol{e}$ векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$, получаем, что координаты векторов $[\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ и $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ совпадают. Из этого следует, что эти векторы равны.

Векторное и смешанное произведения векторов, заданных координатами

Пусть $\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$, а $\boldsymbol{b} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}$. Тогда
$$[\mathbf{ab}] = [x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}, x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}] =$$
$$= x_1x_2[\mathbf{i},\mathbf{i}] + x_1y_2[\mathbf{i},\mathbf{j}] + x_1z_2[\mathbf{i},\mathbf{k}] + y_1x_2[\mathbf{j},\mathbf{i}] + y_1y_2[\mathbf{j},\mathbf{j}] +$$
$$+ y_1z_2[\mathbf{j},\mathbf{k}] + z_1x_2[\mathbf{k},\mathbf{i}] + z_1y_2[\mathbf{k},\mathbf{j}] + z_1z_2[\mathbf{k},\mathbf{k}].$$
Будем считать, что система координат правая. Тогда
$$[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}] = \boldsymbol{k},\ [\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}] = \boldsymbol{i},\ [\boldsymbol{k},\boldsymbol{i}] = \boldsymbol{j}.$$
Учитывая, что при перемене множителей векторное произведение меняет знак, получаем
$$[\mathbf{a},\mathbf{b}] = x_1y_2\mathbf{k} - x_1z_2\mathbf{j} - y_1x_2\mathbf{k} + y_1z_2\mathbf{i} + z_1x_2\mathbf{j} - z_1y_2\mathbf{i} =$$
$$= (y_1z_2 - y_2z_1)\mathbf{i} - (x_1z_2 - x_2z_1)\mathbf{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{k}. \qquad (1)$$
Формулу (1) удобно записать в виде символического определителя
$$[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$
(для получения формулы надо раскрыть определитель по первой строке).

Пример 2.
Найдем площадь треугольника с вершинами в точках $A = \{2, 2, -3\}$, $B = \{1, 3, -3\}$ и $C = \{1, 2, -1\}$. Площадь этого треугольника S равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах AB и AC. Следовательно,
$$S = \frac{1}{2}S_{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right|.$$

Имеем

$$\overrightarrow{AB} = (-1,1,0),\ \overrightarrow{AC} = (-1,0,2).$$

Поэтому

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Отсюда

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 2^2 + 1} = \frac{3}{2}.$$

Упражнение 1.

При каких значениях α и β вектор $\alpha\,\boldsymbol{i} + \beta\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ будет коллинеарен вектору [***a***, ***b***], если ***a*** = (2, -1, 1), а ***b*** = (1, 2, -2)?

Решение.

Найдем координаты вектора [***a***, ***b***]:

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = \ 0,5,5\ .$$

Поскольку координаты коллинеарных векторов пропорциональны, числа α и β должны удовлетворять равенствам

$$\frac{\alpha}{0} = \frac{\beta}{5} = \frac{1}{5},$$

откуда $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

Пусть теперь ***a*** = (x_1, y_1, z_1), ***b*** = (x_2, y_2, z_2), а ***c*** = ***a*** = (x_3, y_3, z_3). Тогда

$$\mathbf{abc} = \mathbf{a}[\mathbf{b},\mathbf{c}] = x_1\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Тем самым смешанное произведение векторов вычисляется по формуле

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Пример 3. Выясним, какую тройку: правую или левую – образуют векторы ***a*** = (1, 1, 0), ***b*** = (-1, 2, 1) и ***c*** = (-3, -2, 0). Для этого найдем смешанное произведение

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -1.$$

Из того, что $\boldsymbol{abc} < 0$, вытекает, что тройка $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ – левая.

Упражнение 2.

При каком α векторы $\boldsymbol{a}$ = (-1, 1, α), $\boldsymbol{b}$ = (2, 1, 0) и $\boldsymbol{c}$ = (3, 1, 1) являются компланарными?

Решение.

Смешанное произведение компланарных векторов равно нулю, поэтому

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & \alpha \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -\alpha - 3 = 0,$$

откуда α = -3.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «*Векторное и смешанное произведения*»

Задача 1.

Найти модуль вектора $[\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}]$, если $|\boldsymbol{a}| = 6$, $|\boldsymbol{b}| = 7$, а угол между векторами **a** и $\boldsymbol{b}$ равен 30°.

Указание

Векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю, поэтому

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}] = 0.$$

Операция векторного умножения некоммутативна,

$$[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}] = -[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$$

Решение

Используя свойства векторного произведения, получим:

$[\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}] = 2[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}] - 6[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}] + [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] - 3[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}] = 2\cdot 0 + 6[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] - 3\cdot 0 =$
$= 7[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Следовательно, $|[\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}]| = 7|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]| = 7\,|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin\varphi = 7\cdot 6\cdot 7\cdot 0{,}5 = 147$.

Ответ: $|[\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}]| = 147$.

Задача 2.

Известно, что $|\boldsymbol{a}| = 2$, $|\boldsymbol{b}| = 10$ и $|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]| = 12$. Найти скалярное произведение $\boldsymbol{ab}$.

Указание

Поскольку $|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin\varphi$, можно найти $\sin\varphi$, а затем с помощью основного тригонометрического тождества вычислить $\cos\varphi$.

Решение

Поскольку $|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, получаем: $12 = 2\cdot 10\cdot \sin\varphi$, откуда $\sin\varphi = 0{,}6$. Тогда $\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi = 0{,}64$.

Если угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ острый, то $\cos\varphi = 0{,}8$, и $\boldsymbol{ab} = 2\cdot 10\cdot 0{,}8 = 16$; если же этот угол тупой, то $\cos\varphi = -0{,}8$, и $\boldsymbol{ab} = -16$.

Ответ: $\boldsymbol{ab} = \pm 16$.

Задача 3.
Найти координаты векторного произведения векторов $\boldsymbol{a} = \{3; 2; 1\}$ и $\boldsymbol{b} = \{-1; 1; -2\}$.

Указание

Воспользуйтесь формулами для координатной записи векторного произведения:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Решение

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left\{ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right\} = \{-5; 5; 5\}.$$

Ответ: $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] = \{-5; 5; 5\}$.

Задача 4.
Даны точки $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$, $C(1; 3; -1)$. Найти площадь треугольника ABC.

Указание

Рассмотрите векторы

$$\overrightarrow{AB} = (4; -5; 0) \quad и \quad \overrightarrow{AC} = (0; 4; -3).$$

Модуль векторного произведения $[AB, AC]$ равен площади параллелограмма $ABMC$, построенного на них как на смежных сторонах, а площадь треугольника ABC равна половине площади $ABMC$.

Решение

Рассмотрим векторы

$$\overrightarrow{AB} = (4; -5; 0) \quad и \quad \overrightarrow{AC} = (0; 4; -3).$$

Модуль векторного произведения [*AB*, *AC*] равен площади параллелограмма *ABMC*, построенного на них как на смежных сторонах, а площадь треугольника *ABC* равна половине площади *ABMC*.

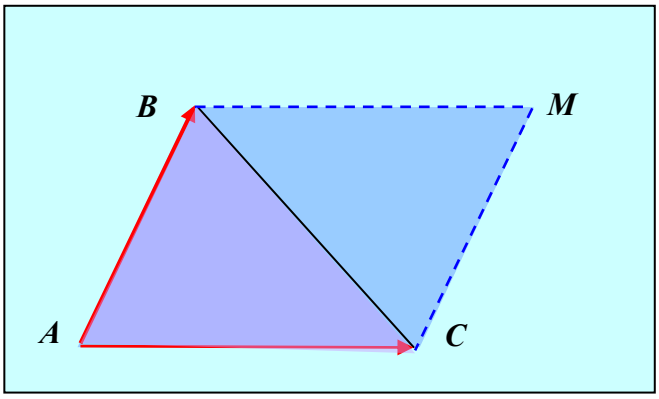


Рис. 7

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left\{\begin{vmatrix}-5 & 0\\ 0 & -3\end{vmatrix};\ \begin{vmatrix}4 & 0\\ 0 & -3\end{vmatrix};\ \begin{vmatrix}4 & -5\\ 0 & 4\end{vmatrix}\right\}=\{15;\ 12;\ 16\}.$$

$$\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right\|=\sqrt{15^2+12^2+16^2}=\sqrt{625}=25,$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 25=12{,}5.$$

Ответ: 12,5.

Задача 5.
Даны векторы ***a*** = {4; -1; 2} и ***b*** = {1; 1; -3}. Найти координаты векторного произведения [***a*** – 4***b***, ***b***].

Указание

Воспользуйтесь тем, что

$$\left[\vec{a}-4\vec{b},\vec{b}\right]=[\vec{a},\vec{b}]-4[\vec{b},\vec{b}]=[\vec{a},\vec{b}]-4\cdot 0.$$

Решение

$$\left[\vec{a}-4\vec{b},\vec{b}\right]=[\vec{a},\vec{b}]-4[\vec{b},\vec{b}]=[\vec{a},\vec{b}]-4\cdot 0=[\vec{a},\vec{b}]=$$

$$=\left\{\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix}4 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix};\ \begin{vmatrix}4 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right\}=\{1;\ 14;\ 5\}.$$

Ответ: {1; 14; 5}.

Задача 6.
Даны векторы ***a*** = {2; -1; 1}, ***b*** = {3; 3; 4} и ***c*** = {2; 0; 2}. Найти координаты вектора ***d***, если известно, что он перпендикулярен векторам ***a*** и ***b***, а скалярное произведение ***dc*** = -8.

Указание

Векторное произведение [***a***, ***b***] перпендикулярно обоим сомножителям, то есть [***a***, ***b***] перпендикулярен ***a*** и ***b***.

Решение

Векторное произведение [***a***, ***b***] перпендикулярно обоим сомножителям, то есть [***a***, ***b***] перпендикулярен ***a*** и ***b***.

Следовательно, вектор ***d*** || [***a***,***b***], поэтому координаты вектора ***d*** пропорциональны координатам [***a***,***b***].

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \left\{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}\right\} = \{-7;\ -5;\ 9\}.$$

Пусть ***d*** = {-7*k*; -5*k*; 9*k*}, тогда ***dc*** = -7*k* ·2 + 9*k* ·2 = 4*k* = -8.

Следовательно, *k* = -2, и ***d*** = {14; 10; -18}.

Ответ: ***d*** = {14; 10; -18}.

Задача 7.

Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках *A*(2; 2; 2), *B*(3; 1; 5), *C*(0; 4; 3), *D*(5; 0; 7).

Указание

Модуль смешанного произведения векторов *AB*, *AC*, *AD* равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах как на смежных ребрах.

Решение

Модуль смешанного произведения векторов *AB*, *AC*, *AD* равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах как на смежных ребрах. У треугольной пирамиды *ABCD* высота равна высот параллелепипеда, а площадь основания вдвое меньше площади основания параллелепипеда. Поэтому

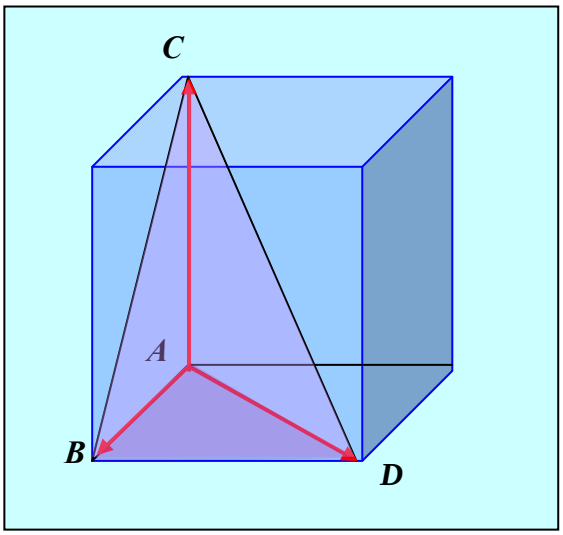


Рис. 8

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ABPC} h = \frac{1}{6} V_{пар} = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{B} \right|.$$

$$\overrightarrow{AB} = \{1;\ -1;\ 3\},\ \ \overrightarrow{AC} = \{-2;\ 2;\ 1\},\ \ \overrightarrow{AD} = \{3;-2;\ 5\}.$$

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -7;\ V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|-7\right| = \frac{7}{6}.$$

Ответ: $\frac{7}{6}$.

2.2. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

2.2.1. *Уравнение прямой на плоскости*

Общее уравнение прямой на плоскости

Пусть на плоскости задана декартова прямоугольная система координат. Говорят, что соотношение (или уравнение)

$$F(x, y) = 0 \qquad (1)$$

задает множество точек L на плоскости, если для любой точки $M \in L$ ее координаты удовлетворяют равенству (1), и наоборот, если для всех пар (x,y), удовлетворяющих (1), точка $M = \{x, y\}$ принадлежит множеству L. При этом говорят, что уравнение (1) является уравнением множества L.

Пусть на плоскости дана точка $M_0 = \{x_0, y_0\}$. Найдем уравнение прямой L, проходящей через эту точку перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n} = (A, B)$. Пусть $M = \{x, y\}$ – произвольная точка на прямой L. Тогда

$$M \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_0} \perp \mathbf{n} \Leftrightarrow \mathbf{n}\overrightarrow{MM_0} = 0 \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

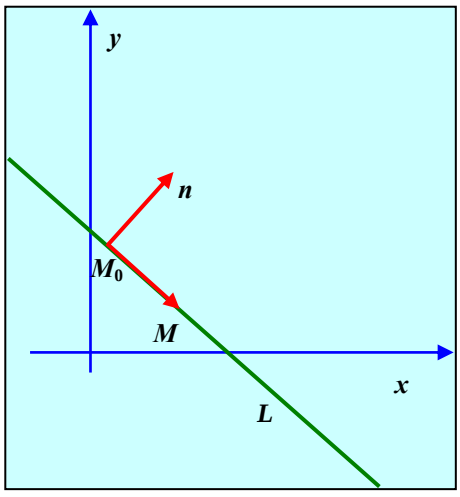


Рис. 1

Тем самым уравнение прямой L задается в виде

$$Ax + By + C = 0, \qquad (2)$$

где $C = -Ax_0 - By_0$.

Нормальным вектором прямой называется любой ненулевой вектор, перпендикулярный этой прямой.

Пример 1. Найдем уравнение прямой с нормальным вектором $\boldsymbol{n}$ = (-3, 2), проходящей через точку $M_0 = \{2, 1\}$. Имеем

$$-3(x - 2) + 2(y - 1) = 0$$

или

$$-3x + 2y + 4 = 0.$$

Теорема 9.1. Всякая прямая на плоскости может быть задана уравнением

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0, \qquad (3)$$

и любое уравнение (3) задает на плоскости некоторую прямую. При этом вектор $\boldsymbol{n} = (A, B)$ является нормальным вектором этой прямой.

Доказательство.

Пусть дана произвольная прямая. Выберем на ней точку $M_0 = \{x_0, y_0\}$. Пусть $\boldsymbol{n} = (A, B)$ – некоторый нормальный вектор этой прямой. Тогда, как было показано выше, уравнение этой прямой запишется в виде (3).

Покажем, что всякое уравнение (3) определяет некоторую прямую на плоскости. Найдем точку $M_0 = \{x_0, y_0\}$, координаты которой удовлетворяют уравнению

$$Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

Если $A \neq 0$, то, например, можно положить

$$x_0 = -\frac{C}{A}, \quad y_0 = 0.$$

А если $B \neq 0$, то

$$x_0 = 0, \quad y_0 = -\frac{C}{B}.$$

Теперь построим прямую с нормальным вектором $\boldsymbol{n} = (A, B)$, проходящую через точку M_0. Ее уравнение будет иметь вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Раскрывая скобки, приходим к уравнению (3).

Уравнение (3) называется *общим уравнением прямой* на плоскости.

9.2. Неполные уравнения прямой

Если хотя бы один из коэффициентов уравнения (3) равен нулю, то такое уравнение называется *неполным*.

1. Предположим, что $C = 0$, т.е. уравнение прямой задается в виде
$$Ax + By = 0.$$
Такая прямая (см. рис. 2) проходит через начало координат, так как координаты точки $O = \{0,0\}$ удовлетворяют уравнению этой прямой.
2. Пусть $A = 0$ (при этом $B \neq 0$). Тогда прямая (см. рис. 3) параллельна оси Ox, так как ее нормальный вектор $\boldsymbol{n} = (0, B)$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{i}$. Ее уравнение может быть записано в виде
$$y = -\frac{C}{B}.$$

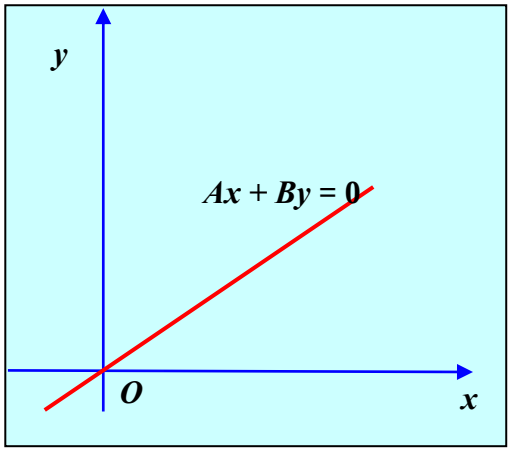


Рис. 2

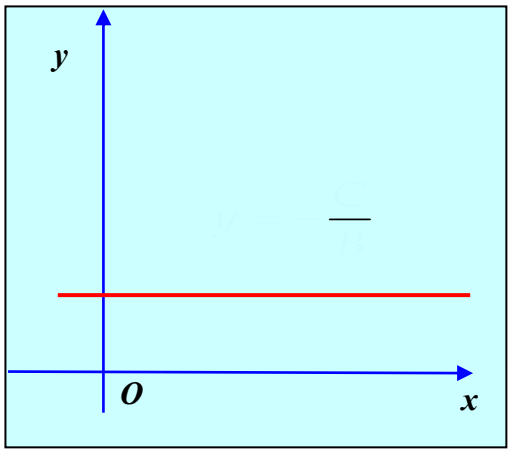


Рис. 3

3. Пусть $B = 0$ (при этом $A \neq 0$). Тогда прямая (см. рис. 4) параллельна оси Oy, так как ее нормальный вектор $\boldsymbol{n} = (A,0)$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{j}$. Ее уравнение может быть записано в виде
$$x = -\frac{C}{A}.$$

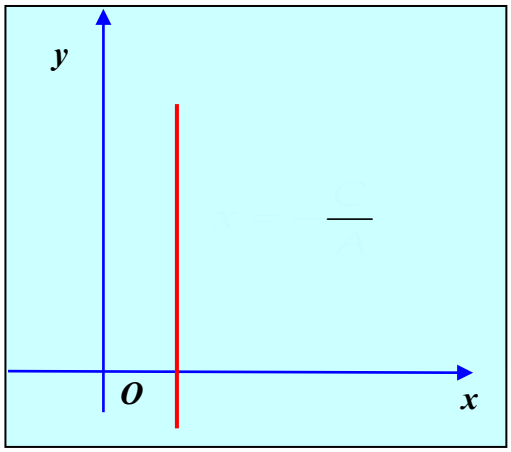


Рис. 4

Уравнение прямой в отрезках

Предположим, что все коэффициенты в уравнении прямой (3) отличны от нуля. Тогда, перенеся C в правую часть равенства и разделив обе части равенства на $-C$, получим уравнение

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1, \qquad (4)$$

где $p = -C/A$, а $q = -C/B$. Уравнение (9.4) называется уравнением прямой *в отрезках*. Числа p и q имеют простой геометрический смысл – это величины отрезков, которые прямая отсекает на координатных осях. Поэтому уравнение прямой в отрезках удобно использовать для построения графика прямой.

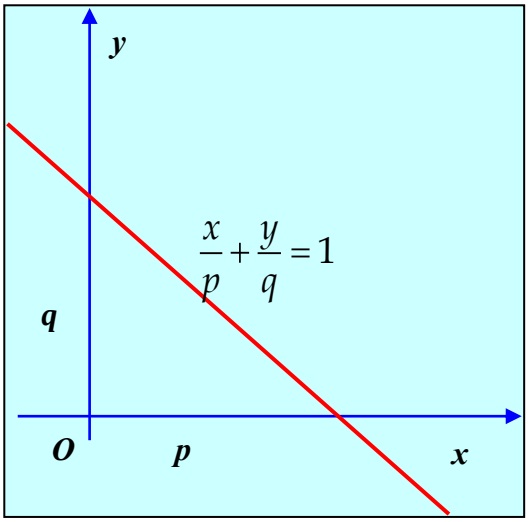


Рис. 5

Взаимное расположение прямых на плоскости

Пусть заданы уравнения двух прямых

$$L_1: \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$L_2: \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Векторы $\boldsymbol{n}_1 = (A_1, B_1)$ и $\boldsymbol{n}_2 = (A_2, B_2)$ являются нормальными векторами для прямых L_1 и L_2 соответственно.

1. Условие параллельности прямых L_1 и L_2 эквивалентно условию коллинеарности нормальных векторов $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$, что эквивалентно пропорциональности координат этих векторов. Таким образом,

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

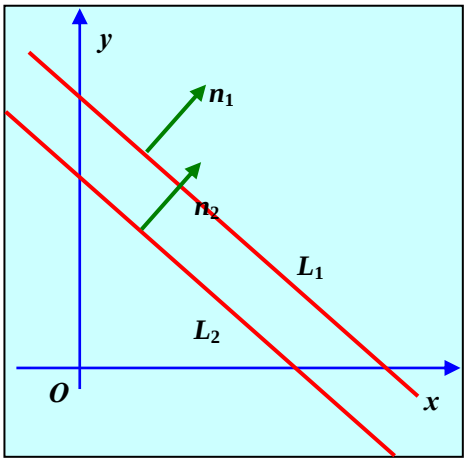


Рис. 6

2. Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2 эквивалентно условию ортогональности нормальных векторов $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$, что эквивалентно равенству нулю скалярного произведения этих векторов. Таким образом,

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

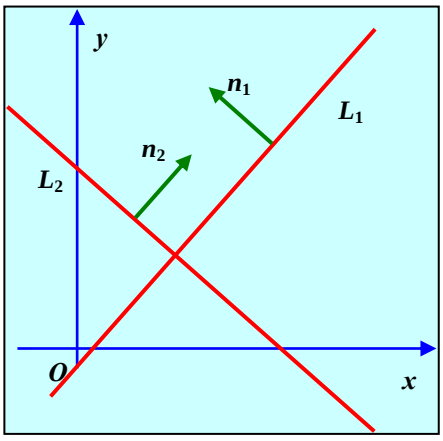


Рис. 7

3. Нахождение угла φ между прямыми L_1 и L_2 сводится к нахождению угла между нормальными векторами $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$. Имеем

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1|\,|\mathbf{n}_2|}.$$

Тем самым

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

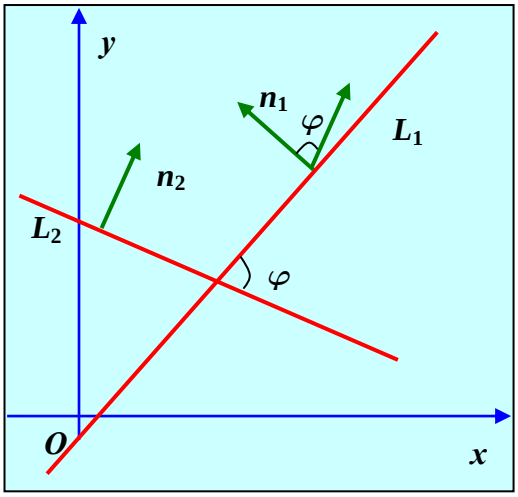


Рис. 8

Пример 2. Найдем угол между прямыми

$$L_1: \quad 3x + \sqrt{3}y + 1 = 0,$$
$$L_2: \quad x + \sqrt{3}y - 4 = 0.$$

Имеем

$$\mathbf{n}_1 = (3, \sqrt{3}), \quad \mathbf{n}_2 = (1, \sqrt{3}).$$

Следовательно,

$$\cos\varphi = \frac{3+3}{\sqrt{12}\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом, угол между прямыми равен 30°.

Упражнение 1. При каких значениях параметра a прямые

$$L_1: \quad (a+1)x + 2y - 3 = 0,$$
$$L_2: \quad x - 2ay + 4 = 0,$$

a) параллельны, *b*) перпендикулярны?

Решение.

Нормальные векторы прямых $\boldsymbol{n}_1 = (a + 1, 2)$, $\boldsymbol{n}_2 = (1,-2a)$.

a) условие параллельности:

$$\frac{a+1}{1}=\frac{2}{-2a},\ -a^2-a=1,\ a^2+a+1=0-$$

решений нет, следовательно, прямые не могут быть параллельными ни при каком значении a.

b) условие пепрпендикулярности:

$$(a+1)\cdot 1+2(-2a)=0,\ 1-3a=0,\ a=\frac{1}{3}.$$

Ответ: параллельность невозможна; прямые перпендикулярны при $a=\frac{1}{3}$.

Каноническое уравнение прямой на плоскости

Всякий ненулевой вектор, параллельный данной прямой, называется *направляющим* вектором прямой. Найдем уравнение прямой с направляющим вектором $\boldsymbol{a}=(l, m)$, проходящей через точку $M_0=\{x_0, y_0\}$. Пусть $M=\{x, y\}$ – произвольная точка на искомой прямой L. Тогда

$$M\in L \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_0}\ \|\ \mathbf{a}.$$

Условие коллинеарности векторов $\overrightarrow{MM_0}$ и $\boldsymbol{a}$ записывается как пропорциональность их координат:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}. \qquad (5)$$

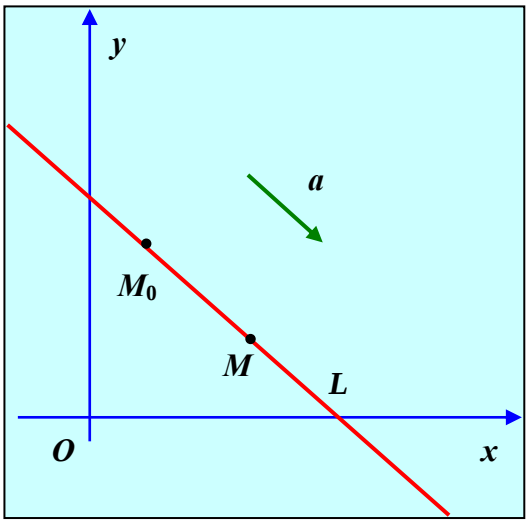


Рис. 9

Уравнение прямой, записанное в виде (5), называется *каноническим уравнением прямой* на плоскости.

Найдем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_0=\{x_0, y_0\}$ и $M_1=\{x_1, y_1\}$. Для этого достаточно взять в качестве направляющего вектора вектор

$$\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0).$$

Тогда искомое уравнение будет иметь вид

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}. \qquad (6)$$

Пример 3. Даны координаты вершин треугольника A = {1,3}, B = {1,4} и C = {5,3}. Найти уравнение прямой, на которой лежит медиана этого треугольника, проведенная из вершины B на сторону AC.

Найдем сначала координаты точки M, являющейся серединой стороны AC. Имеем

$$M = \frac{1+5}{2}, \frac{3+3}{2} = \{3,3\}.$$

Далее строим прямую, проходящую через точки B и M, используя уравнение (9.6):

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-4}{3-4}.$$

Тем самым искомая прямая задается уравнением

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-1} \quad или \quad x + 2y - 9 = 0.$$

Упражнение 2. Даны координаты вершин треугольника A = {1,1}, B = {1,2} и C = {5,1}. Найти уравнение прямой, на которой лежит высота этого треугольника, проведенная из вершины B на сторону AC.

Решение.

Направляющим вектором прямой AC можно считать вектор

$$\overrightarrow{AC} = (5-1, 1-1) = (4,0).$$

Тогда направляющим вектором высоты будет ортогональный ему вектор, например, $\boldsymbol{a}$ = (0,1). Следовательно, уравнение высоты как прямой, проходящей через точку B с направляющим вектором $\boldsymbol{a}$ можно задать в виде (9.5):

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{1} \quad или \quad x - 1 = 0.$$

Ответ: $x - 1 = 0$.

Нормальное уравнение прямой

Пусть задана произвольная прямая L. Проведем через начало координат прямую, перпендикулярную L. Точку пересечения ее с прямой L обозначим через P. Через $\boldsymbol{n}$ обозначим единичный вектор, совпадающий с направлением вектора $\overrightarrow{OP}$. В случае, если точка P совпадает с O, возьмем в качестве $\boldsymbol{n}$ любой вектор единичной длины.

Так как ***n*** – единичный вектор, его координаты имеют вид

$$\mathbf{n} = (\cos\varphi, \sin\varphi),$$

где φ - угол между вектором ***n*** и осью *Ox*. Положим $p = |\overrightarrow{OM}|$.

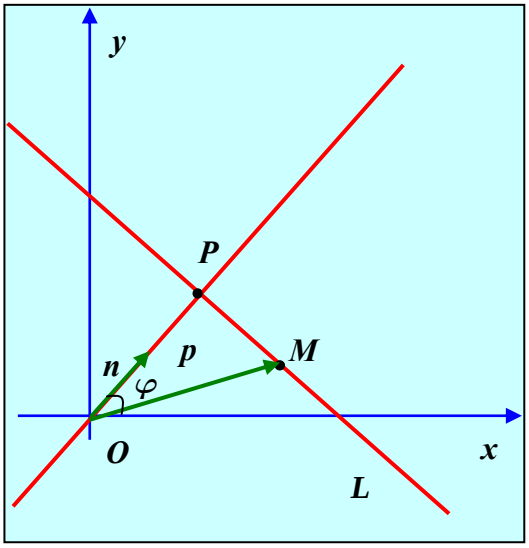


Рис. 10

Имеем

$$M = \{x, y\} \in L \Leftrightarrow np_{\overrightarrow{OP}}\overrightarrow{OM} = p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}\cdot\mathbf{n} = p \Leftrightarrow x\cos\varphi + y\sin\varphi = p.$$

Уравнение

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$$

называется *нормальным уравнением* прямой.

Для того чтобы перейти от общего уравнения прямой

$$Ax + By + C = 0$$

к нормальному, надо умножить его на такое число *t*, для которого

$$At = \cos\varphi, \quad Bt = \sin\varphi, \quad Ct = -p.$$

Отсюда

$$t^2 = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

а знак *t* противоположен знаку *C*.

Пример 4. Приведем уравнение прямой

$$3x - 4y + 2 = 0$$

к нормальному виду. Для этого надо разделить обе части на

$$-\sqrt{3^2 + 4^2} = -5.$$

Получаем

$$-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{2}{5}=0.$$

Отклонение и расстояние от точки до прямой

Обозначим через d расстояние от точки M до прямой L. *Отклонением* точки M от прямой L называется число d, если M и начало координат O лежат по разные стороны от прямой L, и число $-d$, если M и O лежат по одну сторону от L. Если O принадлежит L и $\boldsymbol{n} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ – нормальный вектор прямой L, то отклонение положим равным d, когда M лежит по ту же сторону от L, куда направлен вектор $\boldsymbol{n}$, и $-d$ – в противном случае.

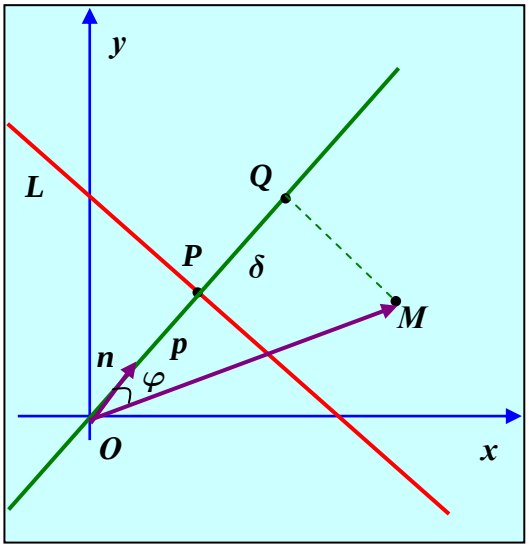


Рис. 11

Пусть Q – проекция точки $M = \{x, y\}$ на ось, определяемую вектором $\boldsymbol{n}$. Тогда отклонение точки M от прямой L равно

$$\delta = np_{\mathbf{n}}\overrightarrow{PQ}.$$

Поэтому

$$np_{\mathbf{n}}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}\cdot\mathbf{n} = x\cos\varphi + y\sin\varphi = p + \delta.$$

Отсюда

$$\delta = x\cos\varphi + y\sin\varphi - p.$$

В силу того, что $d = |\delta|$, имеем

$$d = |x\cos\varphi + y\sin\varphi - p|.$$

Пример 5. Даны координаты вершин треугольника $A = \{0,1\}$, $B = \{2,1\}$ и $C = \{3,-1\}$. Найти длину высоты h, проведенной из вершины B на сторону AC.

Длина высоты равна расстоянию от точки B до прямой, проходящей через точки A и C. Найдем уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\frac{x-0}{3-0}=\frac{y-1}{-1-1} \quad или \quad 2x+3y-3=0.$$

Приведем это уравнение к нормальному виду:

$$\frac{2}{\sqrt{13}}x+\frac{3}{\sqrt{13}}y-\frac{3}{\sqrt{13}}=0.$$

Следовательно,

$$h=\left|\frac{2}{\sqrt{13}}\cdot 2+\frac{3}{\sqrt{3}}\cdot 1-\frac{3}{\sqrt{13}}\right|=\frac{4}{\sqrt{13}}.$$

Упражнение 3. Найти расстояние от точек M_1 = {-1,3} и M_2 = {2,1} до прямой

$$3x - 4y + 1 = 0$$

и выяснить, лежат ли эти точки по одну сторону от прямой или по разные стороны.

Решение.

Приведем уравнение прямой к нормальному виду:

$$-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{1}{5}=0$$

и найдем отклонения данных точек от прямой:

$$\delta_1=-\frac{3}{5}(-1)+\frac{4}{5}\cdot 3-\frac{1}{5}=\frac{14}{5};$$

$$\delta_2=-\frac{3}{5}\cdot 2+\frac{4}{5}\cdot 1-\frac{1}{5}=-\frac{3}{5}.$$

Тогда

$$d_1=|\delta_1|=\frac{14}{5}, \quad d_2=|\delta_2|=\frac{3}{5},$$

а поскольку отклонения точек от прямой имеют разные знаки, точки расположены по разные стороны от прямой.

Ответ: $d_1=\frac{4}{5}$, $d_2=\frac{3}{5}$, точки расположены по разные стороны от прямой.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «*Уравнение прямой на плоскости*»

Задача 1.

Даны уравнения двух сторон параллелограмма: $2x + y + 3 = 0$ и $2x – 5y + 9 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей: $2x – y - 3 = 0$. Найти координаты вершин этого параллелограмма.

Указание

Выясните, уравнения каких сторон даны в условии задачи: параллельных или смежных, и как расположена данная диагональ по отношению к данным сторонам.

Решение

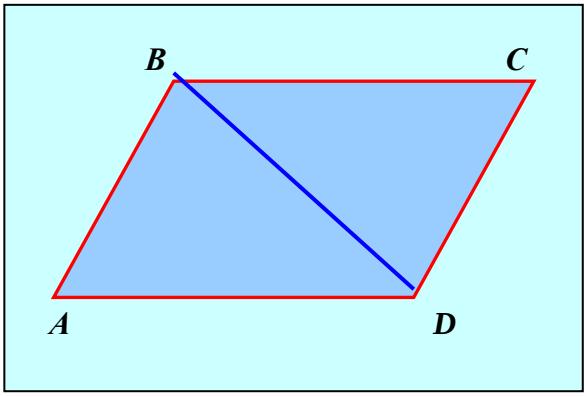


Рис. 12

Выясним, уравнения каких сторон даны в условии задачи: параллельных или смежных.

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{2}{2}=1,\quad \frac{B_1}{B_2}=\frac{1}{-5}=-\frac{1}{5}\neq\frac{A_1}{A_2},$$

следовательно, прямые пересекаются, то есть даны уравнения смежных сторон параллелограмма.

Условие параллельности прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ *и* $A_2x + B_2y + C_2 = 0$:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}.$$

Пусть даны уравнения сторон AB и AD. Тогда координаты точки A будут решением системы уравнений:

$$\begin{cases}2x+y+3=0\\2x-5y+9=0\end{cases}\Rightarrow 6y-6=0\Rightarrow y=1,\ x=-2\Rightarrow A(1;-2).$$

Теперь определим, уравнение какой диагонали: AC или BD – нам известно. Если это диагональ AC, то на ней лежит точка A, следовательно, координаты этой точки должны удовлетворять уравнению диагонали. Проверим:

$$2\cdot 1-(-2)-3=1\neq 0.$$

Значит, точка A не лежит на данной прямой, то есть дано уравнение диагонали BD.

Тогда вершина B лежит на прямых AB и BD, значит, ее координаты найдем из системы:

$$\begin{cases}2x+y+3=0\\2x-y-3=0\end{cases}\Rightarrow x=0,\ y=-3\Rightarrow B(0;-3).$$

Система уравнений для определения координат точки D составлена из уравнений прямых AD и BD:

$$\begin{cases} 2x-5y+9=0 \\ 2x-y-3=0 \end{cases} \Rightarrow -4y+12=0,\ y=3,\ x=3 \Rightarrow D(3;\ 3).$$

Остается найти координаты точки C. Составим уравнения прямых BC и DC. Поскольку BC параллельна AD, их угловые коэффициенты равны. Найдем угловой коэффициент прямой AD:

$$5y=2x+9,\ y=\frac{2}{5}x+\frac{9}{5} \Rightarrow k_{AD}=\frac{2}{5}=k_{BC}.$$

Тогда BC можно задать уравнением

$$y-y_B=k_{BC}(x-x_B) \Rightarrow y+3=\frac{2}{5}x,\ 2x-5y-15=0.$$

Аналогично AB: $y = -2x - 3$, $k_{AB} = -2 = k_{DC}$; DC: $y - 3 = -2(x - 3)$, $2x + y - 9 = 0$. Найдем координаты точки C, решив систему из двух полученных уравнений:

$$\begin{cases} 2x-5y-15=0 \\ 2x+y-9=0 \end{cases} \Rightarrow -6y-6=0,\ y=-1,\ x=5 \Rightarrow C(5;-1).$$

Ответ: $A(1; -2)$, $B(0; -3)$, $C(5; -1)$, $D(3; 3)$.

Задача 2.

Найти точку, симметричную точке $A(2; 1)$ относительно прямой, проходящей через точки $B(-1; 7)$ и $C(1; 8)$.

Указание

Представьте себе, что вам нужно *построить* искомую точку на плоскости. Последовательность действий при этом можно задать так:

1) провести прямую BC;
2) провести через точку A прямую, перпендикулярную BC;
3) найти точку O пересечения этих прямых и отложить на прямой AO по другую сторону прямой BC отрезок $OA_1 = AO$.

Решение

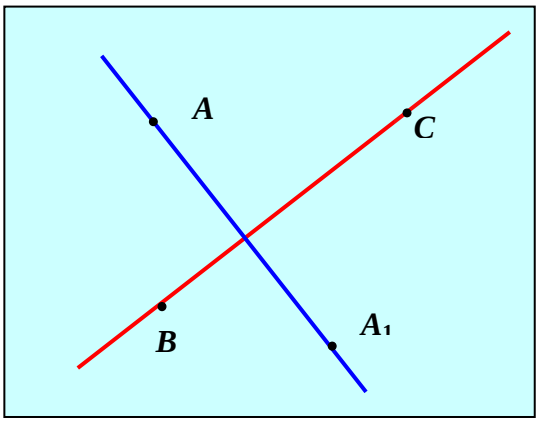


Рис. 13

Представим себе, что нам нужно *построить* искомую точку на плоскости. Последовательность действий при этом можно задать так:

4) провести прямую BC;
5) провести через точку A прямую, перпендикулярную BC;
6) найти точку O пересечения этих прямых и отложить на прямой AO по другую сторону прямой BC отрезок $OA_1 = AO$.

Тогда точка A_1 будет симметричной точке A относительно прямой BC.

Теперь заменим каждое из действий составлением уравнений и вычислением координат точек.

1) Найдем уравнение прямой BC в виде:

$$\frac{x-x_B}{x_C-x_B}=\frac{y-y_B}{y_C-y_B}\Rightarrow\frac{x+1}{1+1}=\frac{y-7}{8-7}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{x+1}{2}=\frac{y-7}{1}\Rightarrow x-2y+15=0.$$

2) Найдем угловой коэффициент прямой BC:

$$2y=x+15,\ y=\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}\Rightarrow k_{BC}=\frac{1}{2}.$$

Прямая AO перпендикулярна прямой BC, поэтому

$$k_{AO}=-\frac{1}{k_{BC}}=-2.$$

Составим уравнение прямой AO:

$$y-y_A=k_{AO}(x-x_A)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-1=-2(x-2)\Rightarrow 2x+y-5=0.$$

3) Найдем координаты точки O как решение системы:

$$\begin{cases}x-2y+15=0\\2x+y-5=0\end{cases}\Rightarrow 5x+5=0,$$

$$x=-1,\ y=7\Rightarrow O(-1;7).$$

4) Точка O – середина отрезка AA_1, поэтому

$$x_O=\frac{x_A+x_{A_1}}{2},\ y_O=\frac{y_A+y_{A_1}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{A_1}=2x_O-x_A=-2-2=-4;$$

$$y_{A_1}=2y_O-y_A=14-1=13\Rightarrow O(-4;13).$$

Ответ: (-4; 13).

Задача 3.

Найти угол между прямыми l_1: $3x-y+5=0$ и l_2: $2x+y-7=0$.

Указание

Если φ – угол между прямыми l_1 и l_2, то $\varphi=\alpha_2-\alpha_1$, где α_2 и α_1 – углы, образованные прямыми l_1 и l_2 с положительной полуосью Ox. Тогда

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 \cdot tg\alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1},$$

где k_1 и k_2 – угловые коэффициенты прямых l_1 и l_2.

Решение

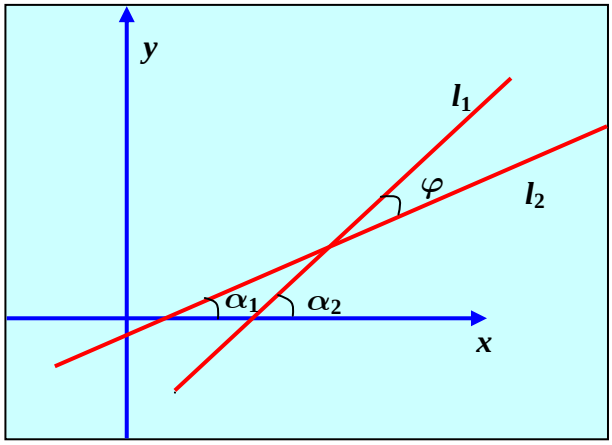


Рис. 14

Если φ – угол между прямыми l_1 и l_2, то $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, где α_2 и α_1 – углы, образованные прямыми l_1 и l_2 с положительной полуосью Ox. Тогда

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 \cdot tg\alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1},$$

где k_1 и k_2 – угловые коэффициенты прямых l_1 и l_2. Найдем k_1 и k_2: для l_1 $y = 3x + 5$, $k_1 = 3$; для второй: $y = -2x + 7$, $k_2 = -2$. Следовательно,

$$tg\varphi = \frac{-2 - 3}{1 - 2 \cdot 3} = 1,\ \varphi = 45°.$$

Ответ: 45^o.

Для прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ *и* $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ *справедлива формула:*

$$tg\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$

Задача 4.

Определить, лежит ли точка $M(2; 3)$ внутри или вне треугольника, стороны которого заданы уравнениями $4x - y - 7 = 0$, $x + 3y - 31 = 0$, $x + 5y - 7 = 0$.

Указание

Если точка M расположена внутри треугольника ABC, то ее отклонение δ от каждой стороны треугольника имеет тот же знак, что и для вершины, не лежащей на этой стороне, а если точка M лежит вне треугольника, то по

крайней мере с одной из вершин она окажется в разных полуплоскостях относительно стороны треугольника.

Решение

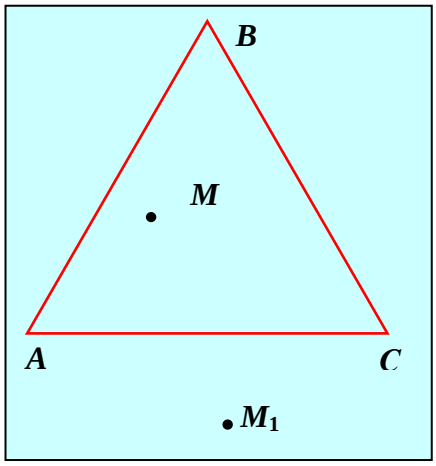


Рис. 15

Пусть первое уравнение задает сторону AB, второе – BC, третье – AC. Найдем координаты точек A, B и C:

$$\begin{cases} 4x-y-7=0 \\ x+5y-7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=4x-7 \\ x+20x-35-7=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=2,\ y=1 \Rightarrow A(2;\ 1).$$

$$\begin{cases} 4x-y-7=0 \\ x+3y-31=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=4x-7 \\ x+12x-21-31=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=4,\ y=9 \Rightarrow B(4;\ 9).$$

$$\begin{cases} x+y-7=0 \\ x+3y-31=0 \end{cases} \Rightarrow 2y+24=0,$$

$$y=-12,\ x=67 \Rightarrow C(67;-12).$$

Для ответа на вопрос задачи отметим, что:

1) если точка M расположена внутри треугольника ABC, то ее отклонение δ от каждой стороны треугольника имеет тот же знак, что и для вершины, не лежащей на этой стороне (т.е. точка M расположена относительно каждой стороны треугольника в одной полуплоскости с третьей вершиной);
2) если точка M лежит вне треугольника, то по крайней мере с одной из вершин она окажется в разных полуплоскостях относительно стороны треугольника (на рисунке: точки M_1 и B расположены по разные стороны от прямой AC).

Составим нормальные уравнения сторон треугольника ABC:

$$AB:\ \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{17},\ c<0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu=\frac{1}{\sqrt{17}},\ AB:\ \frac{4}{\sqrt{17}}x-\frac{1}{\sqrt{17}}y-\frac{7}{\sqrt{17}}=0;$$

$$BC:\ \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{10},\ c<0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu=\frac{1}{\sqrt{10}},\ BC:\ \frac{1}{\sqrt{10}}x+\frac{3}{\sqrt{10}}y-\frac{31}{\sqrt{10}}=0;$$

$$AC:\ \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{26},\ c<0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu=\frac{1}{\sqrt{26}},\ AC:\ \frac{1}{\sqrt{26}}x+\frac{5}{\sqrt{26}}y-\frac{7}{\sqrt{26}}=0.$$

Вычислим соответствующие отклонения:

1) для точек M и A относительно прямой BC:

$$\delta_M=\frac{2}{\sqrt{10}}+\frac{9}{\sqrt{10}}-\frac{31}{\sqrt{10}}=-\frac{20}{\sqrt{10}}<0;$$

$$\delta_A=\frac{2}{\sqrt{10}}+\frac{3}{\sqrt{10}}-\frac{31}{\sqrt{10}}=-\frac{26}{\sqrt{10}}<0.$$

2) для точек M и B относительно прямой AC:

$$\delta_M=\frac{2}{\sqrt{26}}+\frac{15}{\sqrt{26}}-\frac{7}{\sqrt{26}}=\frac{10}{\sqrt{26}}>0;$$

$$\delta_B=\frac{4}{\sqrt{26}}+\frac{45}{\sqrt{26}}-\frac{7}{\sqrt{26}}=\frac{42}{\sqrt{26}}>0.$$

3) для точек M и C относительно прямой AB:

$$\delta_M=\frac{8}{\sqrt{17}}-\frac{3}{\sqrt{17}}-\frac{7}{\sqrt{17}}=-\frac{2}{\sqrt{17}}<0;$$

$$\delta_C=\frac{168}{\sqrt{17}}+\frac{12}{\sqrt{17}}-\frac{7}{\sqrt{17}}=\frac{173}{\sqrt{17}}>0.$$

Итак, точки M и C лежат по разные стороны от прямой AB. Следовательно, точка M расположена вне треугольника ABC.

Ответ: Точка M расположена вне треугольника ABC.

Задача 5.

Для треугольника ABC с вершинами $A(-3; -1)$, $B(1; 5)$, $C(7; 3)$ составить уравнения медианы и высоты, выходящих из вершины B.

Указание

Составьте уравнение медианы как прямой, проходящей через точки B и M – середину стороны AC, а высоты – как прямой, проходящей через точку B и перпендикулярной стороне AC.

Решение

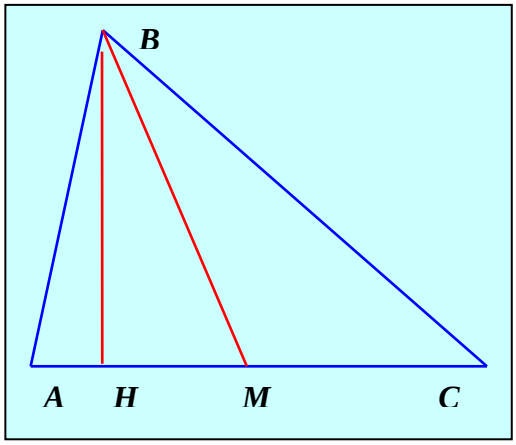


Рис. 16

1) Медиана BM проходит через точку B и точку M – середину отрезка AC. Найдем координаты точки M:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-3+7}{2} = 2;$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1.$$

Тогда уравнение медианы можно записать в виде:

$$\frac{x - x_B}{x_M - x_B} = \frac{y - y_B}{y_M - y_B} \Rightarrow \frac{x-1}{2-1} = \frac{y-5}{1-5} \Rightarrow 4x + y - 9 = 0.$$

2) Высота BH перпендикулярна стороне AC. Составим уравнение AC:

$$\frac{x+3}{7+3} = \frac{y+1}{3+1} \Rightarrow 2x - 5y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5},$$

$$k_{AC} = \frac{2}{5},\ k_{BH} = -\frac{1}{k_{AC}} = -\frac{5}{2}.$$

$$BH:\ y - 5 = -\frac{5}{2}(x-1) \Rightarrow 5x + 2y - 15 = 0.$$

Ответ: медиана BM: $4x + y - 9 = 0$; высота BH: $5x + 2y - 15 = 0$.

Задача 6.

Определить, при каком значении a прямая

$$(a-5)x + (a^2-1)y + 2a^2 + 7a - 9 = 0$$

параллельна оси ординат. Написать уравнение прямой.

Указание

Если прямая параллельна оси ординат, то в уравнении $Ax + By + C = 0$ $B = 0$, $C \neq 0$.

Решение

Если прямая параллельна оси ординат, то в уравнении $Ax + By + C = 0$ $B = 0$, $C \neq 0$. Из условия $B = 0$ получаем: $a^2 - 1 = 0$, $a = \pm 1$.
При $a = 1$ $C = 2 + 7 - 9 = 0$ – второе условие не выполняется (получившаяся при этом прямая $-4x = 0$ не параллельна оси Oy, а совпадает с ней).
При $a = -1$ получим: $-6x - 14 = 0$, $3x + 7 = 0$.

Ответ: $3x + 7 = 0$ при $a = -1$;

Задача 7.
Составить уравнения всех прямых, проходящих через точку $M(2; 3)$ и отсекающих от координатного угла треугольник площадью 12.

Указание
Составьте уравнение искомой прямой «в отрезках»:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где $|a|$ и $|b|$ - длины отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях. Тогда

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}|a| \cdot |b| = 12,$$

откуда $|ab| = 24$. Кроме того, координаты точки $M(2; 3)$ должны удовлетворять уравнению «в отрезках».

Решение

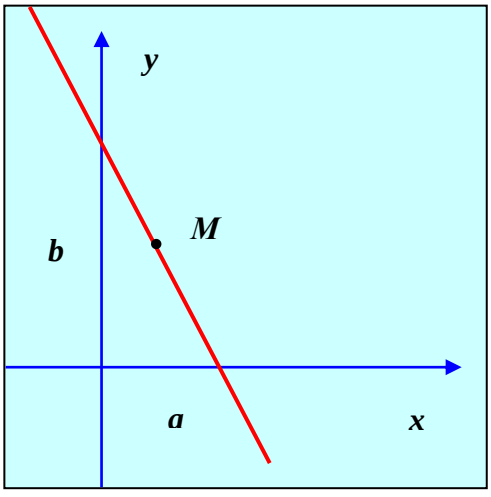


Рис. 17

Составим уравнение искомой прямой «в отрезках»:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где $|a|$ и $|b|$ - длины отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях. Тогда

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}|a|\cdot|b| = 12,$$

откуда $|ab| = 24$. Кроме того, координаты точки $M(2; 3)$ должны удовлетворять уравнению «в отрезках». Таким образом, для a и b можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1 \\ |ab| = 24 \end{cases}.$$

1) $$\begin{cases} \frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1 \\ ab = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{24}{a} \\ \frac{2}{a}+\frac{a}{8}=1 \end{cases} \Rightarrow a^2 - 8a + 16 = 0, a = 4,\ b = 6.$$

2) $$\begin{cases} \frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1 \\ ab = -24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{24}{a} \\ \frac{2}{a}-\frac{a}{8}=1 \end{cases} \Rightarrow a^2 + 8a - 16 = 0,$$

$$a = -4 \pm 4\sqrt{2},\ b = -\frac{24}{-4 \pm 4\sqrt{2}} = -6(1 \mp \sqrt{2}).$$

Следовательно, условию задачи удовлетворяют три прямые:

1) $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1 \Rightarrow 3x + 2y - 12 = 0;$

2) $-\frac{x}{4(1+\sqrt{2})}-\frac{y}{6(1-\sqrt{2})}=1 \Rightarrow 3(1-\sqrt{2})x + 2(1+\sqrt{2})y - 12 = 0;$

3) $-\frac{x}{4(1-\sqrt{2})}-\frac{y}{6(1+\sqrt{2})}=1 \Rightarrow 3(1+\sqrt{2})x + 2(1-\sqrt{2})y - 12 = 0.$

Ответ:

$3x + 2y - 12 = 0;$

$3(1-\sqrt{2})x + 2(1+\sqrt{2})y - 12 = 0;$

$3(1+\sqrt{2})x + 2(1-\sqrt{2})y - 12 = 0.$

2.2.2. *Уравнение плоскости в пространстве. Уравнения прямой в пространстве*

Общее уравнение плоскости

Пусть в пространстве задана декартова прямоугольная система координат. Говорят, что соотношение (или уравнение)

$$F(x,y,z)=0 \qquad (1)$$

задает множество точек P на плоскости, если для любой точки $M \in P$ ее координаты удовлетворяют равенству (1), и наоборот, если для всех троек (x,y,z), удовлетворяющих (1), точка $M = \{x, y,z\}$ принадлежит множеству P. При этом говорят, что уравнение (1) является уравнением множества P.

Пусть в пространстве дана точка $M_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$. Найдем уравнение плоскости P, проходящей через эту точку перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$. Пусть $M = \{x, y, z\}$ – произвольная точка на плоскости P. Тогда

$$M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_0} \perp \mathbf{n} \Leftrightarrow \mathbf{n}\overrightarrow{MM_0} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

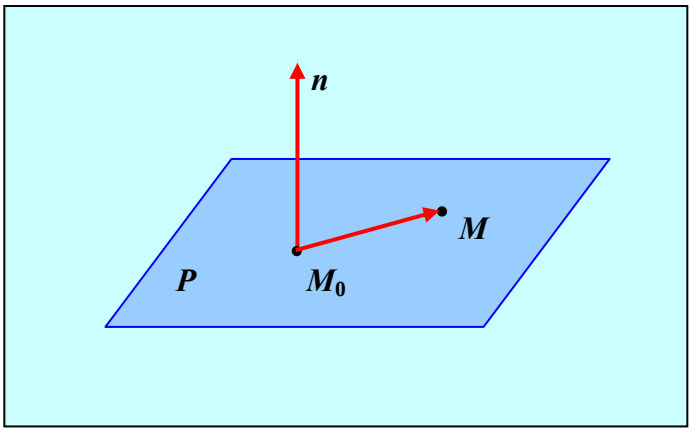


Рис. 1

Тем самым уравнение плоскости P задается в виде

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (2)$$

где $D = -Ax_0 – By_0 – Cz_0$.

Нормальным вектором плоскости называется любой ненулевой вектор, перпендикулярный этой плоскости.

Пример 1. Найдем уравнение плоскости с нормальным вектором $\boldsymbol{n} = (-2,2,3)$, проходящей через точку $M_0 = \{1,2,-1\}$. Имеем

$$-2(x-1)+2(y-2)+3(z+1)=0$$

или

$$-2x+2y+z+1=0.$$

Теорема 10.1. Всякая плоскость в пространстве может быть задана уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0, \qquad (3)$$

и любое уравнение (3) задает в пространстве некоторую плоскость. При этом вектор $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ является нормальным вектором этой плоскости.

Доказательство.
Пусть дана произвольная плоскость. Выберем на ней точку $M_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$. Пусть $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ – некоторый нормальный вектор этой плоскости. Тогда, как было показано выше, уравнение этой плоскости запишется в виде (3).

Покажем, что всякое уравнение (3) определяет некоторую плоскость в пространстве. Найдем точку $M_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$, координаты которой удовлетворяют уравнению

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Если $A \neq 0$, то, например, можно положить

$$x_0 = -\frac{D}{A}, \quad y_0 = z_0 = 0.$$

Если $B \neq 0$, то

$$x_0 = z_0 = 0, \quad y_0 = -\frac{D}{B}.$$

А если $C \neq 0$, то

$$x_0 = y_0 = 0, \quad z_0 = -\frac{D}{C}.$$

Теперь построим плоскость с нормальным вектором $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$, проходящую через точку M_0. Ее уравнение будет иметь вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Раскрывая скобки, приходим к уравнению (3).

Уравнение (3) называется *общим уравнением плоскости* в пространстве.

Неполные уравнения плоскости

Если хотя бы один из коэффициентов уравнения (3) равен нулю, то такое уравнение называется *неполным*.

1. Предположим, что $D = 0$, т.е. уравнение прямой задается в виде

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Такая плоскость проходит через начало координат, так как координаты точки $O = \{0,0,0\}$ удовлетворяют уравнению этой плоскости.

2. Пусть $A = 0$. Тогда плоскость $By + Cz + D = 0$ параллельна координатной оси Ox, так как ее нормальный вектор $\boldsymbol{n} = (0,B,C)$ ортогонален вектору $\boldsymbol{i}$.
3. Пусть $B = 0$. Тогда плоскость $Ax + Cz + D = 0$ параллельна координатной оси Oy, так как ее нормальный вектор $\boldsymbol{n} = (A,0,C)$ ортогонален вектору $\boldsymbol{j}$.
4. Пусть $C = 0$. Тогда плоскость $Ax + By + D = 0$ параллельна координатной оси Oz, так как ее нормальный вектор $\boldsymbol{n} = (A,B,0)$ ортогонален вектору $\boldsymbol{k}$.
5. Если $A = B = 0$, то плоскость $Cz + D = 0$ параллельна координатной плоскости Oxy, так как она параллельна осям Ox и Oy.
6. Если $A = C = 0$, то плоскость $By + D = 0$ параллельна координатной плоскости Oxz, так как она параллельна осям Ox и Oz.
7. Если $B = C = 0$, то плоскость $Ax + D = 0$ параллельна координатной плоскости Oyz, так как она параллельна осям Oy и Oz.

Уравнение плоскости в отрезках

Предположим, что все коэффициенты в уравнении плоскости (3) отличны от нуля. Тогда, перенеся D в правую часть равенства и разделив обе части равенства на $-D$, получим уравнение

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1, \qquad (4)$$

где $p = -D/A$, $q = -D/B$, а $r = -D/C$.. Уравнение (4) называется уравнением плоскости *в отрезках*. Числа p, q и r имеют простой геометрический смысл – это величины отрезков, которые плоскость отсекает на координатных осях. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что точки с координатами $\{p,0,0\}$, $\{0,q,0\}$ и $\{0,0,r\}$ удовлетворяют уравнению (4).

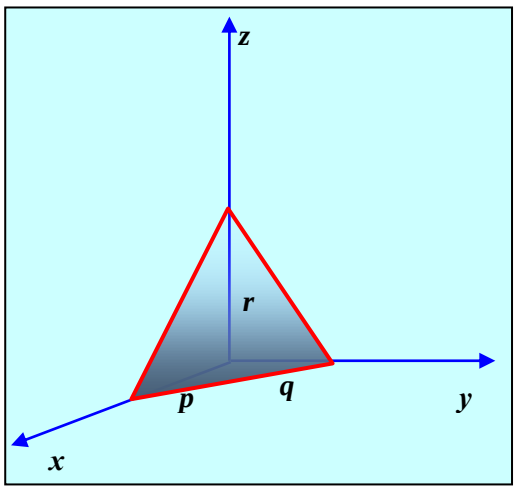


Рис. 2

Взаимное расположение плоскостей

Пусть заданы уравнения двух плоскостей

$$P_1: \quad A_1x + B_1y + C_1 + D_1 = 0,$$
$$P_2: \quad A_2x + B_2y + C_2 + D_2 = 0.$$

Векторы $\boldsymbol{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\boldsymbol{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ являются нормальными векторами для плоскостей P_1 и P_2 соответственно.

1. Условие параллельности плоскостей P_1 и P_2 эквивалентно условию коллинеарности нормальных векторов $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$, что эквивалентно пропорциональности координат этих векторов. Таким образом,

$$P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

2. Условие перпендикулярности плоскостей P_1 и P_2 эквивалентно условию ортогональности нормальных векторов $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$, что эквивалентно равенству нулю скалярного произведения этих векторов. Таким образом,

$$P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

3. Нахождение угла φ между плоскостями P_1 и P_2 сводится к нахождению угла между нормальными векторами $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$. Имеем

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1|\,|\mathbf{n}_2|}.$$

Тем самым

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Пример 12. При каких значениях параметра a плоскости

$$P_1: \quad ax + 2y - 3z + 1 = 0,$$
$$P_2: \quad 2x - 2ay + z - 2 = 0$$

перпендикулярны?

Найдем нормальные векторы этих плоскостей. Имеем

$$\mathbf{n}_1 = (a, 2, -3), \quad \mathbf{n}_2 = (2, -2a, 1).$$

Условие перпендикулярности плоскостей запишется теперь в виде

$$\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2 = 0 \Leftrightarrow 2a - 4a - 3 = 0, \quad a = -1,5.$$

Упражнение 1. Найти угол между плоскостями

$$P_1: \quad x+y+4=0,$$
$$P_2: \quad 3x-3z+1=0.$$

Решение.

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 3+3\cdot 0+0\cdot(-3)}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{3^2+0^2+(-3)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{18}} = \frac{1}{2}, \quad \varphi = 60°.$$

Ответ: 60^o.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Пусть даны три точки $M_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$, $M_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $M_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$, не лежащие на одной прямой. Найдем уравнение плоскости, проходящей через эти три точки. Векторы $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\overrightarrow{M_0M_2}$ не коллинеарны, поэтому точка $M = \{x, y, z\}$ лежит на искомой плоскости в том и только в том случае, если векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\overrightarrow{M_0M_2}$ компланарны.

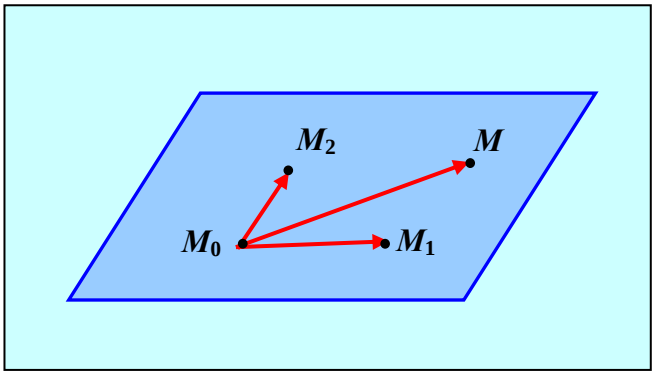


Рис. 3

Условие компланарности трех векторов эквивалентно равенству нулю их смешанного произведения. В силу того, что

$$\overrightarrow{M_0M} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0),$$
$$\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0),$$
$$\overrightarrow{M_0M_2} = (x_2-x_0, y_2-y_0, z_2-z_0),$$

получаем уравнение плоскости, проходящей через точки M_0, M_1 и M_2, в виде

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Нормальное уравнение плоскости

Пусть задана произвольная плоскость P. Проведем через начало координат прямую, перпендикулярную P. Точку пересечения ее с плоскостью P обозначим через R. Через $\boldsymbol{n}$ обозначим единичный вектор, совпадающий с направлением вектора $\overrightarrow{OR}$ (см. рис. 10.4). В случае, если точка R совпадает с O, возьмем в качестве $\boldsymbol{n}$ любой вектор единичной длины.

Так как $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор, его координаты имеют вид

$$\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

где α, β и γ - углы между вектором $\boldsymbol{n}$ и осями Ox, Oy и Oz соответственно. Положим

$$p = |\overrightarrow{OR}|.$$

Имеем

$$M = \{x, y, z\} \in P \Leftrightarrow np_{\overrightarrow{OR}}\overrightarrow{OM} = p \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p.$$

Уравнение

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

называется *нормальным уравнением* плоскости.

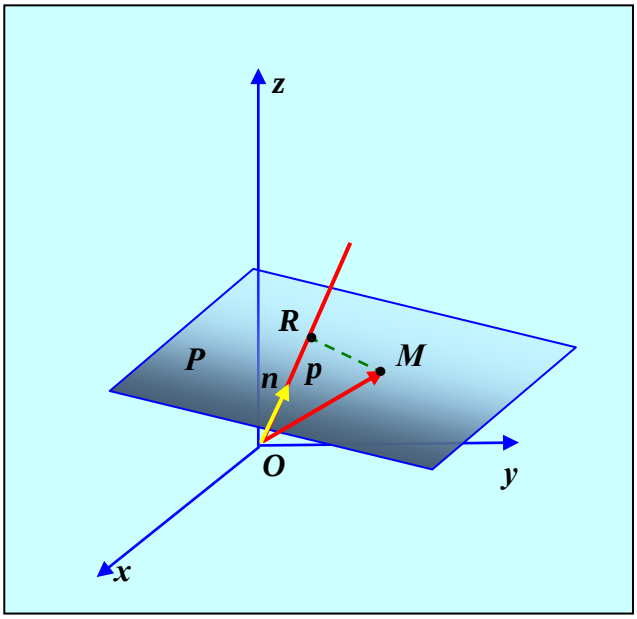


Рис. 4

Для того чтобы перейти от общего уравнения плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

к нормальному, надо умножить его на такое число t, для которого

$$At = \cos\alpha, \quad Bt = \cos\beta, \quad Ct = \cos\gamma, \quad Dt = -p.$$

Так как сумма направляющих косинусов равна единице, то

$$t^2 = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

а знак t противоположен знаку D.

Пример 3. Приведем уравнение плоскости

$$2x - y + 2z - 3 = 0$$

к нормальному виду. Для этого надо разделить обе части на

$$\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3.$$

Получаем

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 1 = 0.$$

Отклонение и расстояние от точки до плоскости

Обозначим через d расстояние от точки M до плоскости P. *Отклонением* точки M от плоскости P называется число d, если M и начало координат O лежат по разные стороны от плоскости P, и число $-d$, если M и O лежат по одну сторону от P. Если O принадлежит P и $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – нормальный вектор плоскости P, то отклонение положим равным d, когда M лежит по ту сторону от P, куда направлен вектор $\boldsymbol{n}$, и $-d$ – в противном случае.

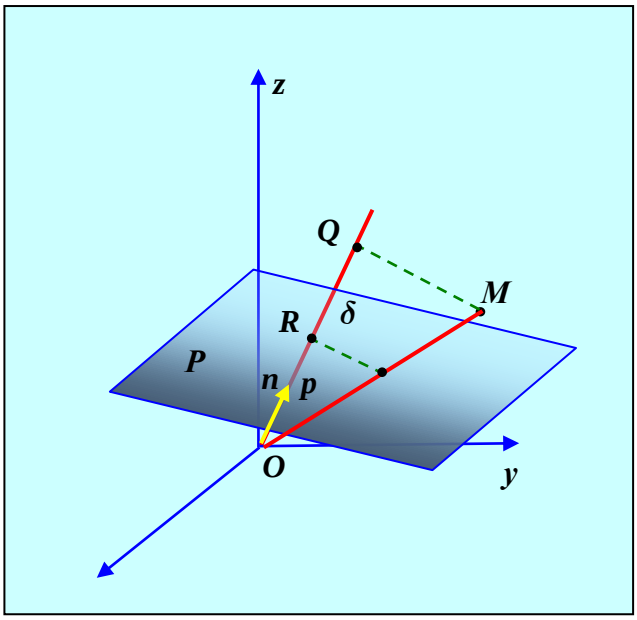


Рис. 5

Пусть Q – проекция точки $M = \{x, y, z\}$ на ось, определяемую вектором $\boldsymbol{n}$. Тогда отклонение точки M от плоскости P равно

$$\delta = np_{\mathbf{n}}\overrightarrow{RQ}.$$

Поэтому

$$np_{\mathbf{n}}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}\cdot\mathbf{n} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p + \delta.$$

Отсюда

$$\delta = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p.$$

В силу того, что $d = |\delta|$, имеем

$$d = |x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p|.$$

Пример 4. Даны координаты вершин пирамиды $A = \{0,1,1\}$, $B = \{2,1,-1\}$, $C = \{3,-1,0\}$ и $D = \{3,1,2\}$. Найти длину высоты h, проведенной из вершины A на основание BCD.

Длина высоты равна расстоянию от точки A до плоскости, проходящей через точки B, C и D. Найдем уравнение плоскости, проходящей через эти точки:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 3-2 & -1-1 & 0+1 \\ 3-2 & 1-1 & 2+1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$-6(x-2) - 2(y-1) + 2(z+1) = 0.$$

Раскрывая скобки и сокращая на -2, приходим к уравнению

$$3x + y - z - 8 = 0.$$

Приведем это уравнение к нормальному виду:

$$\frac{3}{\sqrt{11}}x + \frac{1}{\sqrt{11}}y - \frac{1}{\sqrt{11}}z - \frac{8}{\sqrt{11}} = 0.$$

Следовательно,

$$h = \left|\frac{3}{\sqrt{11}}\cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{11}}\cdot 1 - \frac{1}{\sqrt{11}}\cdot 1 - \frac{8}{\sqrt{11}}\right| = \frac{8}{\sqrt{11}}.$$

Упражнение 2. Найти расстояния от точек $M_1 = \{-1,3,2\}$ и $M_2 = \{2,1,-3\}$ до плоскости

$$x - 2y + 2z + 1 = 0$$

и выяснить, лежат ли эти точки по одну сторону от плоскости или по разные стороны.

Решение.

Приведем уравнение плоскости к нормальному виду:

$$-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{1}{3} = 0$$

и найдем отклонения точек M_1 и M_2 от плоскости:

$$\delta_1 = \left| -\frac{1}{3}(-1) + \frac{2}{3}\cdot 3 - \frac{2}{3}\cdot 2 - \frac{1}{3} \right| = \frac{2}{3},$$

$$\delta_2 = \left| -\frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{2}{3}\cdot 1 - \frac{2}{3}(-3) - \frac{1}{3} \right| = \frac{5}{3}.$$

Поскольку отклонения имеют одинаковые знаки, точки лежат по одну сторону от плоскости. Расстояния от точек до плоскости равны

$$d_1 = |\delta_1| = \frac{2}{3}, \quad d_2 = |\delta_2| = \frac{5}{3}.$$

Ответ: точки лежат по одну сторону от плоскости; расстояние от точки M_1 до плоскости равно 2/3, а от точки M_2 – 5/3.

Прямая в пространстве

Прямую в пространстве невозможно задать одним уравнением. Для этого требуется система двух или более уравнений.

Первая возможность составить уравнения прямой в пространстве – представить эту прямую как пересечение двух непараллельных плоскостей, заданных уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \quad \text{и} \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

где коэффициенты A_1,B_1,C_1 и A_2,B_2,C_2 не пропорциональны:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1x + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2x + D_2 &= 0. \end{aligned} \qquad (5)$$

Однако при решении многих задач удобнее пользоваться другими уравнениями прямой, содержащими в явной форме некоторые ее геометрические характеристики.

Составим уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ параллельно вектору $\boldsymbol{a}=\{l,m,n\}$.

Любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой, называется ее **направляющим вектором.**

Для любой точки $M(x,y,z)$, лежащей на данной прямой, вектор $\boldsymbol{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ коллинеарен направляющему вектору $\boldsymbol{a}$. Поэтому имеют место равенства:

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}, \qquad (6)$$

называемые **каноническими уравнениями** прямой в пространстве.

В частности, если требуется получить уравнения прямой, проходящей через две точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, направляющим вектором такой прямой можно считать вектор $\boldsymbol{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, и уравнения (6) принимают вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad - \qquad (7)$$

уравнения прямой, проходящей через две данные точки.

Если же принять каждую из равных дробей в уравнениях (6) за некоторый параметр *t*, можно получить так называемые **параметрические уравнения прямой**:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt. \\ z = z_0 + nt \end{cases} \qquad (8)$$

Для того, чтобы перейти от уравнений (5) к каноническим или параметрическим уравнениям прямой, требуется найти направляющий вектор этой прямой и координаты любой точки, принадлежащей ей. Направляющий вектор прямой ортогонален нормалям к обеим плоскостям, следовательно, он коллинеарен их векторному произведению. Поэтому в качестве направляющего вектора можно выбрать $[\boldsymbol{n_1 n_2}]$ или любой вектор с пропорциональными координатами. Чтобы найти точку, лежащую на данной прямой, можно задать одну ее координату произвольно, а две остальные найти из уравнений (5), выбрав их так, чтобы определитель из их коэффициентов не равнялся нулю.

Пример 5.

Составим канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x + y - 3z - 5 = 0 \\ x - 5y + 4z + 3 = 0 \end{cases}.$$

Найдем $[\boldsymbol{n_1 n_2}]$. $\boldsymbol{n_1}$ = (2,1,-3), $\boldsymbol{n_2}$ = (1,-5,4). Тогда $[\boldsymbol{n_1 n_2}]$ = (-11,-11,-11). Следовательно, направляющим вектором прямой можно считать вектор (1,1,1).

Будем искать точку на прямой с координатой z_0=0. Для координат x_0 и y_0 получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_0 + y_0 - 5 = 0 \\ x_0 - 5y_0 + 3 = 0 \end{cases}'$$

откуда x_0=2, y_0=1. Теперь можно составить канонические уравнения прямой:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}.$$

Параметрические уравнения той же прямой имеют вид:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t. \\ z = t \end{cases}$$

Замечание. Если какая-либо из координат направляющего вектора равна 0, то предполагается, что для любой точки прямой числитель соответствующей дроби в канонических уравнениях тоже равен 0.

Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью

Угол между прямыми в пространстве равен углу между их направляющими векторами. Поэтому, если две прямые заданы каноническими уравнениями вида

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \quad и \quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2},$$

косинус угла между ними можно найти по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}. \qquad (9)$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых тоже сводятся к соответствующим условиям для их направляющих векторов:

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2} \quad -$$

условие параллельности прямых,

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0 \quad -$$

условие перпендикулярности прямых.

Угол φ между прямой, заданной каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

и плоскостью, определяемой общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

можно рассматривать как дополнительный к углу ψ между направляющим вектором прямой и нормалью к плоскости. Тогда

$$\sin\varphi=\cos\psi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Условием параллельности прямой и плоскости является при этом условие перпендикулярности векторов ***n*** и ***a:***

$$Al + Bm + Cn = 0,$$

а **условием перпендикулярности прямой и плоскости** – условие параллельности этих векторов:

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «*Уравнение плоскости в пространстве*»

Задача 1.

Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A={5; -1; 3}, B={2; 2; 0}, C={-1; 1; 1}.

Указание

Для того, чтобы составить уравнение плоскости, нужно знать координаты точки, лежащей в этой плоскости, и координаты нормали, то есть вектора, перпендикулярного плоскости.

Решение

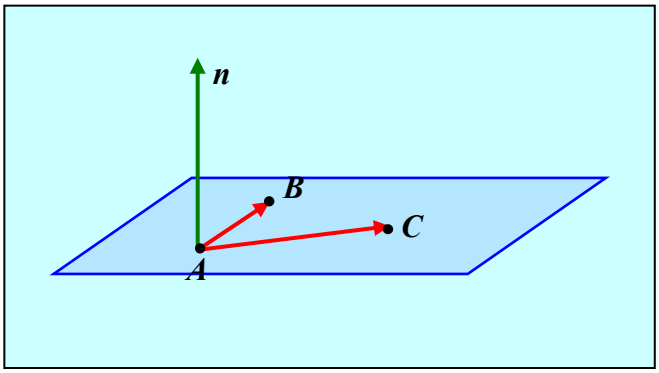


Рис. 6

Векторы AB = (-3; 3; -3) и AC = (-6; 2; -2) параллельны данной плоскости, поэтому их векторное произведение или любой вектор, коллинеарный ему, является нормалью к плоскости.

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left\{\begin{vmatrix}3 & -3\\ 2 & -2\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}-3 & -3\\ -6 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-3 & 3\\ -6 & 2\end{vmatrix}\right\}=$$

$$=(0;\ 12;\ 12)=12(0;\ 1;\ 1).$$

Выберем в качестве нормали $\boldsymbol{n}$ = (0; 1; 1), а точкой $\{x_0; y_0; z_0\}$ будем считать точку B. Тогда уравнение плоскости имеет вид:

$0\cdot(x-2)+1\cdot(y-2)+1\cdot(z-0)=0,\ \ y+z-2=0.$

Ответ: $y+z-2=0$.

Задача 2.

Составить канонические уравнения прямой

$$\begin{cases}2x+y-5z-3=0\\ 5x+3y+8z-13=0\end{cases}.$$

Указание

Для того, чтобы составить канонические или параметрические уравнения прямой в пространстве, нужно знать координаты какой-либо точки, лежащей на этой на этой прямой, и координаты направляющего вектора, то есть вектора, коллинеарного прямой.

Решение

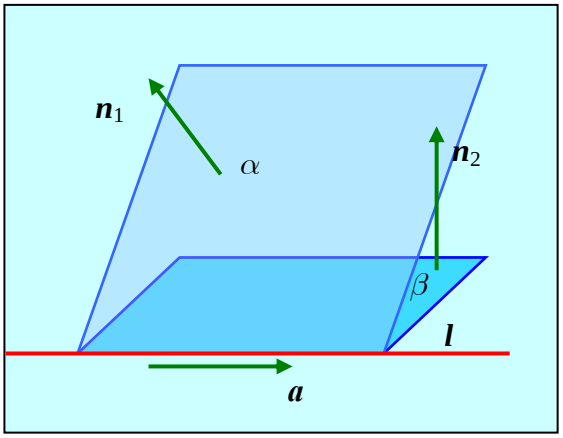


Рис. 7

Прямая является линией пересечения двух плоскостей, поэтому ее направляющий вектор $\boldsymbol{a}$ параллелен каждой из этих плоскостей и соответственно перпендикулярен нормалям $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ к данным плоскостям. В таком случае он коллинеарен векторному произведению $[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2]$.

$\boldsymbol{n}_1 = (2; 1; -5)$, $\boldsymbol{n}_2 = (5; 3; 8)$, $[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] = (23; -41; 1)$.

Итак, $(l; m; n) = (23; -41; 1)$.

Будем искать точку, лежащую на данной прямой, у которой одна из координат принимает выбранное нами значение; тогда остальные две координаты можно определить единственным образом из системы уравнений, задающей пересекающиеся плоскости. Выберем для удобства вычислений $z_0 = 0$, тогда для точки $M=\{x_0; y_0; 0\}$

$$\begin{cases} 2x_0 + y_0 - 3 = 0 \\ 5x_0 + 3y_0 - 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = 3 - x_0 \\ 5x_0 + 9 - 6x_0 - 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 = -4;\ y_0 = 11,\ M = \{-4;\ 11;\ 0\}.$$

Теперь составим канонические уравнения данной прямой:

$$\frac{x+4}{23} = \frac{y-11}{-41} = \frac{z}{1}.$$

Ответ: $\dfrac{x+4}{23} = \dfrac{y-11}{-41} = \dfrac{z}{1}$.

Задача 3.

Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую l:

$$\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = t + 5 \\ z = -t - 1 \end{cases}$$

и точку $M=\{2; -3; 1\}$.

Указание

Точка A={-3,5,-1} принадлежит плоскости, соответственно вектор $\overrightarrow{AM}$ параллелен плоскости. Кроме того, поскольку данная прямая лежит в плоскости, ее направляющий вектор $\boldsymbol{a}$ = (2: 1: -1) параллелен плоскости. Следовательно, нормаль к плоскости коллинеарна векторному произведению этих векторов.

Решение

Поскольку прямая лежит в плоскости, ее направляющий вектор $\boldsymbol{a}$ = (2: 1: -1) параллелен плоскости. При $t = 0$ из уравнений прямой получаем:

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \\ z = -1 \end{cases}$$

координаты точки A, принадлежащей прямой и соответственно плоскости.

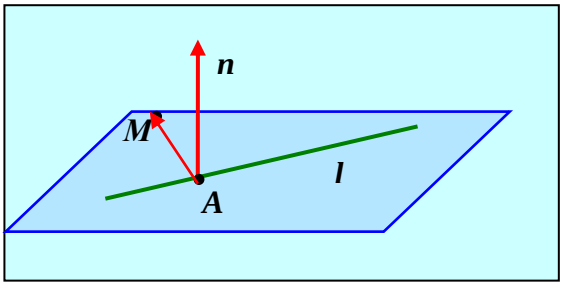


Рис. 8

Тогда вектор AM = (5; -8; 2) параллелен плоскости. Следовательно, нормаль $\boldsymbol{n}$ к плоскости коллинеарна векторному произведению [$\boldsymbol{a}$, AM] = (-6; -9; - 21). Выберем $\boldsymbol{n}$ = (2; 3; 7) и составим уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно $\boldsymbol{n}$:

$$2(x - 2) + 3(y + 3) + 7(z - 1) = 0, \quad 2x + 3y + 7z - 2 = 0.$$

Ответ: $2x + 3y + 7z - 2 = 0$.

Задача 4.
Найти кратчайшее расстояние между прямыми

$$l_1: \frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2} \quad и \quad l_2: \begin{cases} x = t+1 \\ y = t+2 \\ z = 4t+13 \end{cases}.$$

Указание

Координаты направляющих векторов данных прямых $\boldsymbol{a}_1$ = {3; 2; -2} и

$\boldsymbol{a}_2$ = {1; 1; 4} не пропорциональны, следовательно, $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ не коллинеарны, поэтому прямые либо пересекаются, либо скрещиваются.

Составьте уравнение плоскости α, проходящей через прямую l_1 параллельно вектору $\boldsymbol{a}_2$. Если l_1 и l_2 пересекаются, то прямая l_2 будет лежать в этой плоскости; если же l_1 и l_2 скрещиваются, то l_2 параллельна плоскости α, и тогда расстояние между l_1 и l_2 (длина общего перпендикуляра) будет равно расстоянию от любой точки прямой l_2 до плоскости α.

Решение

Координаты направляющих векторов данных прямых $\boldsymbol{a}_1$ = {3; 2; -2} и $\boldsymbol{a}_2$ = {1; 1; 4} не пропорциональны, следовательно, $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ не коллинеарны, поэтому прямые либо пересекаются, либо скрещиваются.

Составим уравнение плоскости α, проходящей через прямую l_1 параллельно вектору $\boldsymbol{a}_2$. Если l_1 и l_2 пересекаются, то прямая l_2 будет лежать в этой плоскости (рис.9); если же l_1 и l_2 скрещиваются, то l_2 параллельна плоскости α, и тогда расстояние между l_1 и l_2 (длина общего перпендикуляра) будет равно расстоянию от любой точки прямой l_2 до плоскости α (рис.10).

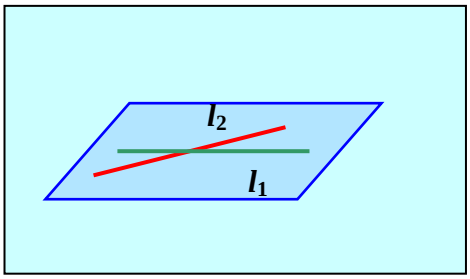


Рис. 9

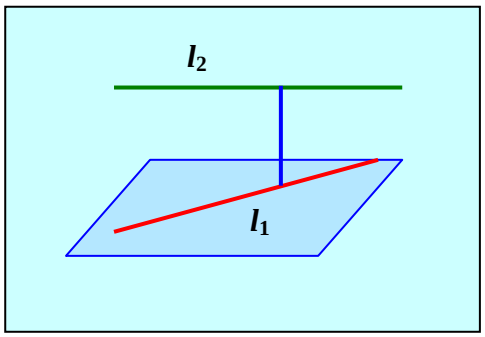


Рис. 10

[$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$] = (10; -14; 1) = $\boldsymbol{n}$, точка A={5; 0; -25} лежит на прямой l_1, следовательно, она лежит и в плоскости α. Тогда уравнение плоскости α имеет вид:

$$10(x - 5) - 14(y - 0) + 1\cdot(z + 25) = 0;\ \ 10x - 14y + z - 25 = 0.$$

Точка B={1; 2; 13} принадлежит прямой l_2. Проверим, лежит ли эта точка в плоскости α:

$$10\cdot 1-14\cdot 2+13-25=-30\neq 0\Rightarrow B\notin l_2\Rightarrow l_2\not\subset\alpha.$$

Тогда искомой величиной будет расстояние от B до α. Его можно найти, составив нормальное уравнение плоскости α:

$$\alpha:\frac{10}{\sqrt{33}}x-\frac{14}{\sqrt{33}}y+\frac{1}{\sqrt{33}}z-\frac{25}{\sqrt{343}}=0,$$

$$d_B=\left|\frac{10}{\sqrt{33}}\cdot 1-\frac{14}{\sqrt{33}}\cdot 2+\frac{1}{\sqrt{33}}\cdot 13-\frac{25}{\sqrt{33}}\right|==\left|-\frac{28}{\sqrt{33}}\right|=\frac{28}{\sqrt{33}}.$$

Ответ: $\frac{28}{\sqrt{33}}$.

Задача 5.

Найти точку, симметричную точке A(5; -10; 4) относительно плоскости

$$\alpha: x - 3y + z - 6 = 0.$$

Указание

Искомая точка B лежит на прямой, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости α так, что $OA = OB$, где точка O – точка пересечения α с прямой AB.

Решение

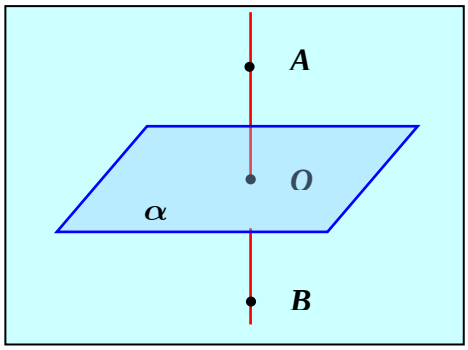


Рис. 11

Искомая точка B лежит на прямой, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости α так, что $OA = OB$, где точка O – точка пересечения α с прямой AB. Составим уравнения прямой AB. Эта прямая перпендикулярна α, поэтому ее направляющим вектором можно считать нормаль к плоскости α: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n}$ = (1; -3; 1).

Параметрические уравнения прямой AB имеют вид:

$$\begin{cases} x = t + 5 \\ y = -3t - 10. \\ z = t + 4 \end{cases}$$

Точка O принадлежит и прямой AB, и плоскости α, поэтому ее координаты должны удовлетворять и уравнениям прямой, и уравнению плоскости.

Подставим в уравнение плоскости α параметрические выражения для x, y, z из уравнений прямой AB:

$$t + 5 - 3(-3t - 10) + t + 4 - 6 = 0;\ 11t + 33 = 0;\ \ t = -3.$$

Итак, координаты точки O:

$$\begin{cases} x = -3 + 5 = 2 \\ y = -3(-3) - 10 = -1 \Rightarrow O(2; -1; 1). \\ z = -3 + 4 = 1 \end{cases}$$

Поскольку точка O – середина отрезка AB, то

$$\begin{cases} x_O = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_O = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z_O = \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = 2x_O - x_A = 4 - 5 = -1 \\ y_B = 2y_O - y_A = -2 + 10 = 8 \Rightarrow B(-1;\ 8; -2). \\ z_B = 2z_O - z_A = 2 - 4 = -2 \end{cases}$$

Ответ: (-1; 8; -2).

2.3. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И КРИВЫЕ 2-ГО ПОРЯДКА

2.3.1. *Линейные операторы и квадратичные формы*

Линейные операторы

Будем говорить, что на множестве векторов R задан **оператор** $\boldsymbol{A}$, если каждому вектору $\boldsymbol{x} \in R$ по некоторому правилу поставлен в соответствие вектор $A\boldsymbol{x} \in R$.

Оператор A называется **линейным**, если для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ и для любого действительного числа λ выполняются равенства:

$$\begin{aligned} A(x + y) &= Ax + Ay, \\ A(\lambda x) &= \lambda Ax \end{aligned} \qquad (1)$$

Линейный оператор называется **тождественным**, если он преобразует любой вектор $\boldsymbol{x}$ в самого себя. Тождественный оператор обозначается E: $E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

Рассмотрим трехмерное пространство с базисом $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$, в котором задан линейный оператор A. Применив его к базисным векторам, мы получим векторы $A\boldsymbol{e_1}, A\boldsymbol{e_2}, A\boldsymbol{e_3}$, принадлежащие этому трехмерному пространству. Следовательно, каждый из них можно единственным образом разложить по векторам базиса:

$$\begin{aligned} A\mathbf{e}_1 &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3, \\ A\mathbf{e}_2 &= a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3, \\ A\mathbf{e}_3 &= a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3. \end{aligned} \qquad (2)$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется **матрицей линейного оператора** $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$. Столбцы этой матрицы составлены из коэффициентов в формулах (2) преобразования базиса.

Замечание. Очевидно, что матрицей тождественного оператора является единичная матрица E.

Для произвольного вектора $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e_2} + x_3\boldsymbol{e_3}$ результатом применения к нему линейного оператора A будет вектор $A\boldsymbol{x}$, который можно разложить по векторам того же базиса:

$$A\mathbf{x} = x_1'\mathbf{e}_1 + x_2'\mathbf{e}_2 + x_3'\mathbf{e}_3,$$

где координаты $x`_i$ можно найти по формулам:

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned} \qquad (3)$$

Коэффициенты в формулах этого линейного преобразования являются элементами строк матрицы A.

Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

Рассмотрим линейный оператор A и два базиса в трехмерном пространстве: $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ и $\underline{\boldsymbol{e}}_1, \underline{\boldsymbol{e}}_2, \underline{\boldsymbol{e}}_3$. Пусть матрица C задает формулы перехода от базиса $\{\boldsymbol{e}_\mathbf{k}\}$ к базису $\{\underline{\boldsymbol{e}}_\mathbf{k}\}$. Если в первом из этих базисов выбранный линейный оператор задается матрицей A, а во втором – матрицей $\underline{A}$, то можно найти связь между этими матрицами, а именно:

$$A = C^{-1}\underline{A}C. \qquad (4)$$

Доказательство.

$$\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{pmatrix} = C\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{pmatrix}, \quad тогда \quad A\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{pmatrix} = \underline{A}C\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{pmatrix}.$$

С другой стороны, результаты применения одного и того же линейного оператора A в базисе $\{\boldsymbol{e}_\mathbf{k}\}$, т.е. $A\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{pmatrix}$, и в базисе $\{\underline{\boldsymbol{e}}_\mathbf{k}\}$: соответственно $\underline{A}\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{pmatrix}$ - связаны матрицей C:

$$\underline{A}\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{pmatrix} = C\ A\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{pmatrix},$$

откуда следует, что $CA=\underline{A}C$. Умножая обе части этого равенства слева на C^{-1}, получим $C^{-1}CA = = C^{-1}\underline{A}C$, что доказывает справедливость формулы (4).

Собственные числа и собственные векторы матрицы

Вектор $\boldsymbol{x}$ называется **собственным вектором** матрицы A, если найдется такое число λ, что выполняется равенство: $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, то есть результатом применения к $\boldsymbol{x}$ линейного оператора, задаваемого матрицей A, является умножение этого вектора на число λ. Само число λ называется **собственным числом** матрицы A.

Подставив в формулы (3) $x'_j = \lambda x_j$, получим систему уравнений для определения координат собственного вектора:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \lambda x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \lambda x_3 \end{cases}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33}-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}. \qquad (5).$$

Эта линейная однородная система будет иметь нетривиальное решение только в случае, если ее главный определитель равен 0 (правило Крамера). Записав это условие в виде:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

получим уравнение для определения собственных чисел λ, называемое **характеристическим уравнением**. Кратко его можно представить так:

$$|A-\lambda E| = 0, \qquad (6)$$

поскольку в его левой части стоит определитель матрицы A-λE. Многочлен относительно λ | A - λE| называется **характеристическим многочленом** матрицы А.

Свойства характеристического многочлена:

1) Характеристический многочлен линейного преобразования не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

$\Delta_A = \Delta_C \Delta_{\underline{A}} \Delta_{C^{-1}}$ (см. (11.4)), но $\Delta_C \Delta_{C^{-1}} = \Delta_E = 1$, следовательно, $\Delta_A = \Delta_{\underline{A}}$. Таким образом, Δ_A не зависит от выбора базиса. Значит, и $|A$-$\lambda E|$ не изменяется при переходе к новому базису.

2) Если матрица A линейного оператора является **симметрической** (т.е. a_{ij}=a_{ji}), то все корни характеристического уравнения (11.6) – действительные числа.

Свойства собственных чисел и собственных векторов:

1) Если выбрать базис из собственных векторов $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{x_3}$, соответствующих собственным значениям λ_1, λ_2, λ_3 матрицы A, то в этом базисе линейное преобразование А имеет матрицу диагонального вида:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Доказательство этого свойства следует из определения собственных векторов.

2) Если собственные значения оператора A различны, то соответствующие им собственные векторы линейно независимы.
3) Если характеристический многочлен матрицы A имеет три различных корня, то в некотором базисе матрица A имеет диагональный вид.

Пример 1.

Найдем собственные числа и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(1- \lambda)(5 - \lambda)(1 - \lambda) + 6 - 9(5 - \lambda) - (1 - \lambda) - (1 - \lambda) = 0,$$

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0,\ \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 6.$$

Найдем координаты собственных векторов, соответствующих каждому найденному значению λ. Из (5) следует, что если $\boldsymbol{x}_{(1)}=\{x_1,x_2,x_3\}$ – собственный вектор, соответствующий $\lambda_1=-2$, то

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} -$$

совместная, но неопределенная система. Ее решение можно записать в виде $\boldsymbol{x}_{(1)}=(a,0,-a)$, где a – любое число. В частности, если потребовать, чтобы $|\boldsymbol{x}_{(1)}|=1$,

$$\mathbf{x}_{(1)} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Подставив в систему (5) $\lambda_2=3$, получим систему для определения координат второго собственного вектора - $\boldsymbol{x}_{(2)}=(y_1,y_2,y_3)$:

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + 3y_3 = 0 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 = 0 \\ 3y_1 + y_2 - 2y_3 = 0 \end{cases},$$

откуда $\boldsymbol{x}_{(2)}=(b,-b,b)$ или, при условии $|\boldsymbol{x}_{(2)}|=1$,

$$\mathbf{x}_{(2)} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Для $\lambda_3 = 6$ найдем собственный вектор $\boldsymbol{x}_{(3)}=(z_1, z_2, z_3)$:

$$\begin{cases} -5z_1 + z_2 + 3z_3 = 0 \\ z_1 - z_2 + z_3 = 0 \\ 3z_1 + z_2 - 5z_3 = 0 \end{cases},$$

$\boldsymbol{x}_{(3)}=\{c,2c,c\}$ или в нормированном варианте

$$\mathbf{x}_{(3)} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right).$$

Можно заметить, что $\boldsymbol{x}_{(1)}\boldsymbol{x}_{(2)} = ab - ab = 0$, $\boldsymbol{x}_{(1)}\boldsymbol{x}_{(3)} = ac - ac = 0$, $\boldsymbol{x}_{(2)}\boldsymbol{x}_{(3)} = bc - 2bc + bc = 0$. Таким образом, собственные векторы этой матрицы попарно ортогональны.

Квадратичные формы и их связь с симметрическими матрицами

Квадратичной формой действительных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется многочлен второй степени относительно этих переменных, не содержащий свободного члена и членов первой степени.

Примеры квадратичных форм:

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \quad (n = 2)$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \quad (8)$$

$$+2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \quad (n = 3)$$

Напомним определение симметрической матрицы:

> Квадратная матрица называется **симметрической**, если $a_{ij} = a_{ji}$, то есть если равны элементы матрицы, симметричные относительно главной диагонали.

Свойства собственных чисел и собственных векторов симметрической матрицы:

1) Все собственные числа симметрической матрицы действительные.

Доказательство (для $n = 2$).

Пусть матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0. \quad (9)$$

Найдем дискриминант:

$$D = a_{11}^2 + 2a_{11}a_{22} + a_{22}^2 - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}^2 = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0,$$

следовательно, уравнение имеет только действительные корни.

2) Собственные векторы симметрической матрицы ортогональны.

Доказательство (для $n = 2$).

Координаты собственных векторов

$$\vec{e_1} = (x_1, y_1) \quad и \quad \vec{e_2} = (x_2, y_2)$$

должны удовлетворять уравнениям:

$$(a_{11} - \lambda_1)x_1 + a_{12}y_1 = 0, \quad (a_{11} - \lambda_2)x_2 + a_{12}y_2 = 0.$$

Следовательно, их можно задать так:

$$\vec{e_1} = \left(a, \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} a \right), \quad \vec{e_2} = \left(b, \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}} b \right).$$

Скалярное произведение этих векторов имеет вид:

$$\vec{e_1}\vec{e_2} = \frac{ab}{a_{12}^2} \; a_{12}^2 + \lambda_1\lambda_2 - a_{11}(\lambda_1 + \lambda_2) + a_{11}^2 \; .$$

По теореме Виета из уравнения (9) получим, что

$$\lambda_1\lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}.$$

Подставим эти соотношения в предыдущее равенство:

$$\frac{ab}{a_{12}^2} \; a_{12}^2 + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 - a_{11}(a_{11} + a_{22}) + a_{11}^2 \; = 0.$$

Значит, $\vec{e_1} \perp \vec{e_2}$.

Замечание. В примере 1 были найдены собственные векторы симметрической матрицы и обращено внимание на то, что они оказались попарно ортогональными.

Матрицей квадратичной формы (8) называется симметрическая матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Таким образом, все собственные числа матрицы квадратичной формы действительны, а все собственные векторы ортогональны. Если все собственные числа различны, то из трех нормированных собственных векторов матрицы (10) можно построить базис в трехмерном пространстве. В этом базисе квадратичная форма будет иметь особый вид, не содержащий произведений переменных.

Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Каноническим видом квадратичной формы (8) называется следующий вид:

$$\overline{f}(x_1, x_2, x_3) = k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + k_3x_3^2. \qquad (11)$$

Покажем, что в базисе из собственных векторов квадратичная форма (8) примет канонический вид. Пусть

$$\begin{aligned}\vec{e_1'} &= b_{11}\vec{e_1} + b_{21}\vec{e_2} + b_{31}\vec{e_3}\\ \vec{e_2'} &= b_{12}\vec{e_1} + b_{22}\vec{e_2} + b_{32}\vec{e_3}\\ \vec{e_3'} &= b_{13}\vec{e_1} + b_{23}\vec{e_2} + b_{33}\vec{e_3}\end{aligned} \quad -$$

нормированные собственные векторы, соответствующие собственным числам $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ матрицы (10) в ортонормированном базисе $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$. Тогда матрицей перехода от старого базиса к новому будет матрица

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}.$$

В новом базисе матрица A примет диагональный вид (7) (по свойству собственных векторов). Таким образом, преобразовав координаты по формулам:

$$\begin{aligned}x_1' &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3\\ x_2' &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3,\\ x_3' &= b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3\end{aligned}$$

получим в новом базисе канонический вид квадратичной формы с коэффициентами, равными собственным числам λ_1, λ_2, λ_3:

$$\overline{f}(x_1', x_2', x_3') = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^3 + \lambda_3 x_3'^2. \qquad (12)$$

Замечание 1. С геометрической точки зрения рассмотренное преобразование координат представляет собой поворот координатной системы, совмещающий старые оси координат с новыми.

Замечание 2. Если какие-либо собственные числа матрицы (10) совпадают, к соответствующим им ортонормированным собственным векторам можно добавить единичный вектор, ортогональный каждому из них, и построить таким образом базис, в котором квадратичная форма примет канонический вид.

Пример 2.

Приведем к каноническому виду квадратичную форму

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz.$$

Ее матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3\\ 1 & 5 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

В примере 1 найдены собственные числа и ортонормированные собственные векторы этой матрицы:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\quad \left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Составим матрицу перехода к базису из этих векторов:

$$B=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

(порядок векторов изменен, чтобы они образовали правую тройку). Преобразуем координаты по формулам:

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{1}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z'$$
$$y=\frac{2}{\sqrt{6}}y'-\frac{1}{\sqrt{3}}z' \quad .$$
$$z=-\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{1}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z'$$

Получим:

$$x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz=$$
$$(\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{1}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z')^2+5(\frac{2}{\sqrt{6}}y'-\frac{1}{\sqrt{3}}z')^2+$$
$$+(-\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{1}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z')^2+2(\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{1}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z')(\frac{2}{\sqrt{6}}y'-\frac{1}{\sqrt{3}}z')+$$
$$+6(\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{1}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z')(-\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{1}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z')+$$
$$+2(\frac{2}{\sqrt{6}}y'-\frac{1}{\sqrt{3}}z')(-\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{1}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z')=$$
$$=-2x'^2+6y'^2+3z'^2.$$

Итак, квадратичная форма приведена к каноническому виду с коэффициентами, равными собственным числам матрицы квадратичной формы.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «*Линейные операторы и квадратичные формы*»

Задача 1.

Пусть $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ – базис в векторном пространстве. Разложить вектор $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3 + 3\boldsymbol{e}_4$ по новому базису $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$, если $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{u}_4 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4$.

Указание

Выпишите матрицу перехода от старого базиса к новому, столбцами которой являются координаты новых базисных векторов в старом базисе. Строки этой

матрицы являются коэффициентами в формулах преобразования старых координат через новые.

Решение

Выпишем матрицу перехода от старого базиса к новому, столбцами которой являются координаты новых базисных векторов в старом базисе:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Строки этой матрицы являются коэффициентами в формулах преобразования старых координат через новые.

Координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в старом базисе: $\boldsymbol{x}$ = (1; 2; -1; 3). Пусть в новом базисе он имеет координаты: $\boldsymbol{x}$ = (x, y, z, t). Тогда, используя матрицу T, найдем связь между старыми и новыми координатами:

$$\begin{cases} 1 = x + y + z + t \\ 2 = y + z + t \\ -1 = z + t \\ 3 = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ z = -4 \\ t = 3 \end{cases}.$$

Следовательно, в новом базисе $\boldsymbol{x}$ = (-1; 3; -4; 3).

Ответ: $\boldsymbol{x}$ = (-1; 3; -4; 3).

Задача 2.

Найти матрицу A' оператора A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

в базисе $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{u}_2 = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$.

Указание

Искомая матрица $A' = T^{-1} A T$, где T – матрица перехода из старого базиса к новому.

Решение

Искомая матрица $A' = T^{-1} A T$, где T – матрица перехода из старого базиса к новому. Составим матрицу T:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$T^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

$$T^{-1}A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & \frac{3}{2}\\ 0 & -2 & -\frac{3}{2}\\ 2 & 3 & \frac{3}{2}\end{pmatrix},\quad A'=(T^{-1}A)T=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -4 & -\frac{3}{2}\\ -\frac{3}{2} & -2 & -\frac{7}{2}\\ \frac{7}{2} & 7 & \frac{13}{2}\end{pmatrix}.$$

Ответ: $A'=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -4 & -\frac{3}{2}\\ -\frac{3}{2} & -2 & -\frac{7}{2}\\ \frac{7}{2} & 7 & \frac{13}{2}\end{pmatrix}$.

Задача 3.

Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 3\end{pmatrix}.$$

Указание

Для определения собственных чисел составьте характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 3\\ 5 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Координаты собственных векторов $\boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i)$ должны удовлетворять системе уравнений, коэффициенты которых получены из элементов строк определителя, стоящего в левой части характеристического уравнения, при подстановке λ_i.

Решение

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 3\\ 5 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0,\ (1-\lambda)(3-\lambda)-15=0,$$

$$\lambda^2-4\lambda-12=0,\ \lambda_1=-2,\ \lambda_2=6.$$

Найдем собственные векторы:

1) для λ = -2 координаты собственного вектора $\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1)$ должны удовлетворять системе уравнений, коэффициенты которых получены из

элементов строк определителя, стоящего в левой части характеристического уравнения, при подстановке $\lambda = -2$:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3y_1 = 0 \\ 5x_1 + 5y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_1 = -x_1.$$

Если $x_1 = 1$, то $y_1 = -1$, и $\boldsymbol{r}_1 = (1; -1)$. Остальные собственные векторы коллинеарны вектору (1; -1), и общий вид собственного вектора, соответствующего $\lambda = -2$: $\boldsymbol{r}_1 = c_1(1; -1)$, где c_1 – произвольная постоянная.

2) для $\lambda = 6$ координаты собственного вектора $\boldsymbol{r}_2$ $(x_2; y_2)$ удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} -5x_2 + 3y_2 = 0 \\ 5x_2 - 3y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_2 = \frac{5}{3}x_2.$$

Пусть $x_2 = 3$, тогда $y_2 = 5$, и $\boldsymbol{r}_2 = (3; 5)$. Соответственно общий вид второго собственного вектора: $\boldsymbol{r}_2 = c_2(3; 5)$.

Ответ: собственные числа $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 6$; собственные векторы $\boldsymbol{r}_1 = c_1(1; -1)$, $\boldsymbol{r}_2 = c_2(3; 5)$.

Задача 4.

В пространстве 3-мерных векторов задан оператор

$$A\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{xi})\boldsymbol{i},$$

где $\boldsymbol{i}$ – базисный вектор декартовой системы координат.

Выяснить геометрический смысл этого оператора.

Указание

Множитель $\boldsymbol{xi}$ – скалярное произведение, то есть число, поэтому вектор $(\boldsymbol{xi})\boldsymbol{i}$ коллинеарен оси Ox.

Решение

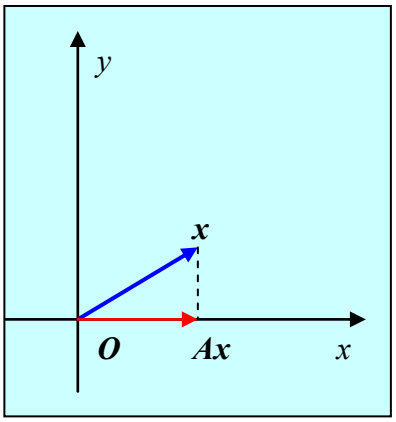


Рис. 1

Оператор A переводит произвольно направленный вектор $\boldsymbol{x}$ в вектор

$k\boldsymbol{i}$, коллинеарный оси Ox, поскольку первый множитель – скалярное произведение, то есть число. Из определения скалярного произведения следует, что

$$A\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}\boldsymbol{i})\boldsymbol{i} = (|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{i}|\cdot\cos\varphi)\ \boldsymbol{i} = (|\boldsymbol{x}|\cos\varphi)\boldsymbol{i}.$$

Следовательно, A – оператор проектирования на ось Ox.

Ответ:

Оператор осуществляет проектирование вектора $\boldsymbol{x}$ на ось Ox;

Задача 5.

Привести матрицу A линейного оператора к диагональному виду и найти соответствующий базис, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Указание

Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы линейного оператора, задайте базис из линейно независимых собственных векторов $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$, в котором матрица оператора примет диагональный вид, и составьте матрицу перехода к новому базису.

Решение

Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ (\lambda-1)(\lambda-2)^2 = 0,\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$$

Найдем собственные векторы, соответствующие полученным собственным числам.

При $\lambda = 1$ для вектора $\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ получаем:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3y_1 - z_1 = 0 \\ -3x_1 + 4y_1 - z_1 = 0 \\ -3x_1 + 3y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ z_1 = x_1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = y_1 = z_1 = 1,\ \ \vec{r}_1 = (1;\ 1;\ 1).$$

Подставим в строки определителя $\lambda = 2$ и найдем связь между координатами собственного вектора $\boldsymbol{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\begin{cases} -3x_2 + 3y_2 - z_2 = 0 \\ -3x_2 + 3y_2 - z_2 = 0 \\ -3x_2 + 3y_2 - z_2 = 0 \end{cases}.$$

Та же зависимость получается для координат третьего собственного вектора $\boldsymbol{r}_3 = (x_3, y_3, z_3)$. Выберем значения двух координат каждого из этих векторов так, чтобы $\boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{r}_3$ были линейно независимы.

Пусть $x_2 = 1$, $y_2 = 0$, тогда $z_2 = -3$, и $\boldsymbol{r}_2 = (1; 0; -3)$.
Для $\boldsymbol{r}_3$ выберем $x_3 = 0$, $y_3 = 1$, тогда $z_3 = 3$, $\boldsymbol{r}_3 = (0; 1; 3)$.
Получен базис из линейно независимых собственных векторов $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$, в котором матрица оператора примет диагональный вид.
Составим матрицу перехода к новому базису:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу, обратную к T:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}..$$

Тогда в базисе из собственных векторов матрица оператора

$$A' = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: в базисе (1; 1; 1), (1; 0; -3), (0; 1; 3) матрица оператора

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 6.
Линейный оператор A задан в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы оператора A^{-1} – оператора, обратного к A.

Указание

Собственные числа обратного оператора являются обратными к собственным числам данного оператора, а их собственные векторы одинаковы.

Решение

Характеристическое уравнение для A:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, (\lambda - 2)^2 = 1, \lambda - 2 = \pm 1, \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1.$$

Собственные векторы: для $\lambda = 3$ $\boldsymbol{r}_1 = c(1; 1)$, для $\lambda = 1$ $\boldsymbol{r}_2 = c(1; -1)$.

Найдем матрицу обратного оператора:

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}..$$

Соответствующее характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3}-\lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \left(\lambda - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}, \lambda - \frac{2}{3} = \pm\frac{1}{3}, \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \frac{1}{3}.$$

Собственные векторы: для $\lambda = 1$ $\boldsymbol{r}_1 = c(1; -1)$, для $\lambda = 1/3$ $\boldsymbol{r}_1 = c(1; 1)$.

Ответ: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1/3,\ \boldsymbol{r}_1 = c(1; -1),\ \boldsymbol{r}_2 = c(1; 1)$.

Задача 7.

Составить матрицу квадратичной формы $3x^2 - 10xy + 8y^2$ и найти ее собственные числа.

Указание

Матрица квадратичной формы $a_{11}x_2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ является симметрической ($a_{ij} = a_{ji}$) и имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Решение

В нашей задаче $a_{11} = 3$, $a_{12} = -5$, $a_{22} = 8$. Следовательно,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение, корнями которого являются собственные числа:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ -5 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0, \lambda^2 - 11\lambda - 1 = 0, \lambda = \frac{11 \pm 5\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: матрица квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$,

собственные числа $\lambda_1 = \frac{11-5\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{11+5\sqrt{5}}{2}$.

Задача 8.

Найти базис, в котором квадратичная форма $2x^2 + 4xy + 5y^2$ будет иметь канонический вид, и указать этот вид.

Указание

Канонический вид квадратичной формы:

1) во-первых, не содержит произведения xy;
2) во-вторых, коэффициенты при x^2 и y^2 равны собственным числам матрицы квадратичной формы.

Базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, состоит из нормированных собственных векторов матрицы квадратичной формы.

Решение

Матрица квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},$$

характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0.$$

Собственные числа: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$.

Собственные векторы:

для $\lambda_1 = 1$ координаты вектора $\boldsymbol{r}_1 = \{x_1, y_1\}$ определяются уравнением $x_1 + 2y_1 = 0$, $x_1 = -2y_1$. Если $y_1 = 1$, то $x_1 = -2$, и $\boldsymbol{r}_1 = c\{-2; 1\}$. Найдем значение c из условия, что вектор $\boldsymbol{r}_1$ нормирован, то есть его длина равна 1:

$$|\vec{r}_1| = c\sqrt{(-2)^2 + 1^2} = c\sqrt{5} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \vec{r}_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Аналогично для $\lambda_2 = 6$: $\boldsymbol{r}_2 = \{x_2, y_2\}$, $-4x_2 + 2y_2 = 0$, $\boldsymbol{r}_2 = c\{1; 2\}$.

$$|\vec{r}_2| = c\sqrt{1^2 + 2^2} = c\sqrt{5} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \vec{r}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Итак, базис имеет вид:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right),$$

и в этом базисе квадратичная форма примет вид: $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$, то есть $x^2 + 6y^2$.

Ответ: в базисе $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ квадратичная форма имеет канонический вид: $x^2 + 6y^2$.

Задача 9.

Указать преобразование координат, приводящее квадратичную форму $8x^2 - 12xy + 17y^2$ к каноническому виду.

Указание

Матрица преобразования координат имеет вид:

$$S = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1)$ и $\boldsymbol{r}_2 = (x_2, y_2)$ – нормированные собственные векторы.

Решение

Найдем базис из нормированных собственных векторов.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 17 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 8-\lambda & -6 \\ -6 & 17-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0,\ \lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 20.$$

$$\vec{r}_1 :\ 3x_1 - 6y_1 = 0,\ x_1 = 2y_1,\ \vec{r}_1 = c\{2;\ 1\},$$

$$|\vec{r}_1| = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{5}},\ \vec{r}_1 = \left\{\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right\};$$

$$\vec{r}_2 :\ -12x_2 - 6y_2 = 0,\ |\vec{r}_2| = 1 \Rightarrow \vec{r}_2 = \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}.$$

Составим матрицу перехода к новому базису, столбцами которой будут координаты новых базисных векторов $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ в старом базисе:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Строки этой матрицы определяют коэффициенты уравнений, выражающих старые координаты через новые:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') \end{cases},$$

где x, y – координаты в старом базисе, а x’, y’ – в новом.

Таким образом, найдено искомое преобразование.

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') \end{cases}.$

Задача 10.

Привести к каноническому виду квадратичную форму $5x^2 - 12xy$.

Указание

Матрица преобразования координат имеет вид:

$$S = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1)$ и $\boldsymbol{r}_2 = (x_2, y_2)$ – нормированные собственные векторы. В новом базисе квадратичная форма имеет канонический вид, причем коэффициенты при x^2 и y^2 совпадают с собственными числами матрицы квадратичной формы.

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 \\ -6 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 - 5\lambda - 36 = 0,\ \lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = -4.$$

$$\vec{r}_1 :\ -4x_1 - 6y_1 = 0,\ x_1 = -\frac{3}{2}y_1,\ \vec{r}_1 = c\{3;\ -2\},$$

$$|\vec{r}_1| = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{13}},\ \vec{r}_1 = \left\{\frac{3}{\sqrt{13}}; -\frac{2}{\sqrt{13}}\right\};$$

$$\vec{r}_2 :\ 9x_2 - 6y_2 = 0,\ |\vec{r}_2| = 1 \Rightarrow \vec{r}_2 = \left\{\frac{2}{\sqrt{13}}; \frac{3}{\sqrt{13}}\right\}.$$

Матрица перехода к базису из собственных векторов:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}.$$

Преобразование координат:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{13}}x' + \frac{2}{\sqrt{13}}y' = \frac{1}{\sqrt{13}}(3x' + 2y') \\ y = -\frac{2}{\sqrt{13}}x' + \frac{3}{\sqrt{13}}y' = \frac{1}{\sqrt{5}}(3y' - 2x') \end{cases}.$$

Подставим найденные выражения в квадратичную форму:

$$5x^2 - 12y^2 = \frac{5}{13}(3x' + 2y')^2 - 12 \cdot \frac{1}{\sqrt{13}}(3x' + 2y') \cdot \frac{1}{\sqrt{13}}(3y' - 2x') =$$

$$= \frac{5}{13}(9x'^2 + 12x'y' + 4y'^2) - \frac{12}{13}(6y'^2 + 5x'y' - 6x'^2) =$$

$$= \frac{1}{13}(117x'^2 - 52y'^2) = 9x'^2 - 4y'^2.$$

Как и следовало ожидать, в новом базисе квадратичная форма имеет канонический вид, причем коэффициенты при x^2 и y^2 совпадают с собственными числами матрицы квадратичной формы.

Ответ: $9x^2 - 4y^2$.

Задача 11.
Найти преобразование координат, приводящее квадратичную форму $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz$ к каноническому виду.

Указание

Матрица квадратичной формы $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Матрица преобразования координат:

$$S = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ и $\boldsymbol{r}_3 = (x_3, y_3, z_3)$ – нормированные собственные векторы.

Решение.
Матрица квадратичной формы $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Для заданной квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 1 \\ -3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0,\ (\lambda + 2)(\lambda - 3)(\lambda - 6) = 0,$$

$$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 6.$$

(Мы не останавливаемся подробно на способах решения уравнений высших порядков. В данном случае, например, один из корней был найден перебором делителей свободного члена, а затем левая часть разложена на множители.)
Найдем нормированные собственные векторы:

1) $\lambda_1 = -2,\ \vec{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}: \begin{cases} 3x_1 - 3y_1 + z_1 = 0 \\ -3x_1 + 3y_1 - z_1 = 0 \\ x_1 - y_1 + 7z_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ z_1 = 0 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{r}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \right).$$

2) $\lambda_2 = 3,\ \vec{r}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}: \begin{cases} -2x_2 - 3y_2 + z_2 = 0 \\ -3x_2 - 2y_2 - z_2 = 0 \\ x_2 - y_2 + 2z_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_2 = -x_2 \\ z_2 = -x_2 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{r}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

3) $\lambda_3 = 6,\ \vec{r}_3 = \{x_3, y_3, z_3\}: \begin{cases} -5x_3 - 3y_3 + z_3 = 0 \\ -3x_3 - 5y_3 - z_3 = 0 \\ x_3 - y_3 - z_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_3 = -x_3 \\ z_3 = 2x_3 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{r}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}} \right).$$

Матрица перехода к новому базису:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

задает преобразование координат:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{3}} y' + \frac{1}{\sqrt{6}} z' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} x' - \frac{1}{\sqrt{3}} y' - \frac{1}{\sqrt{6}} z'. \\ z = -\frac{1}{\sqrt{3}} y' + \frac{2}{\sqrt{6}} z' \end{cases}$$

Заметим, что в новых координатах квадратичная форма примет вид:

$$-2x'^2 + 3y'^2 + 6z'^2,$$

где коэффициенты являются собственными числами, стоящими в той же последовательности, что и соответствующие собственные векторы в матрице *T*.

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{3}}y' - \frac{1}{\sqrt{6}}z'. \\ z = -\frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{2}{\sqrt{6}}z' \end{cases}$

2.3.2. *Кривые и поверхности 2-го порядка*

Кривые второго порядка

Кривыми второго порядка на плоскости называются линии пересечения кругового конуса с плоскостями, не проходящими через его вершину.

Если такая плоскость пересекает все образующие одной полости конуса, то в сечении получается *эллипс*, при пересечении образующих обеих полостей – *гипербола*, а если секущая плоскость параллельна какой-либо образующей, то сечением конуса является *парабола*.

Замечание. Все кривые второго порядка задаются уравнениями второй степени от двух переменных.

Эллипс

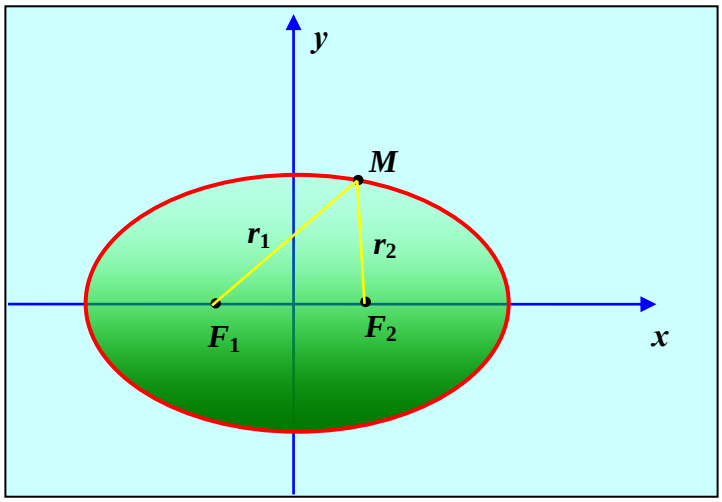


Рис. 1

Эллипсом называется множество точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная.

Замечание. При совпадении точек F_1 и F_2 эллипс превращается в окружность.

Выведем уравнение эллипса, выбрав декартову систему координат так, чтобы ось Ox совпала с прямой F_1F_2, начало координат – с серединой отрезка F_1F_2. Пусть длина этого отрезка равна $2c$, тогда в выбранной системе координат

$F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$. Пусть точка $M(x, y)$ лежит на эллипсе, и сумма расстояний от нее до F_1 и F_2 равна $2a$. Тогда $r_1 + r_2 = 2a$, но

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

поэтому

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Введя обозначение $b^2 = a^2 - c^2$ и проведя несложные алгебраические преобразования, получим *каноническое уравнение эллипса*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1)$$

Эксцентриситетом эллипса называется величина $e=c/a$. *Директрисой* D_i эллипса, отвечающей фокусу F_i, называется прямая, расположенная в одной полуплоскости с F_i относительно оси Oy перпендикулярно оси Ox на расстоянии a/e от начала координат.

Замечание. При ином выборе системы координат эллипс может задаваться не каноническим уравнением (1), а уравнением второй степени другого вида.

Свойства эллипса:

1) Эллипс имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии (главные оси эллипса) и центр симметрии (центр эллипса). Если эллипс задан каноническим уравнением, то его главными осями являются оси координат, а центром – начало координат. Поскольку длины отрезков, образованных пересечением эллипса с главными осями, равны $2a$ и $2b$ ($2a>2b$), то главная ось, проходящая через фокусы, называется большой осью эллипса, а вторая главная ось – малой осью.

2) Весь эллипс содержится внутри прямоугольника

$$|x| \le a, \quad |y| \le b.$$

3) Эксцентриситет эллипса $e < 1$. Действительно,

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \le 1.$$

4) Директрисы эллипса расположены вне эллипса (так как расстояние от центра эллипса до директрисы равно a/e, а $e<1$, следовательно, $a/e>a$, а весь эллипс лежит в прямоугольнике $|x| \le a$, $|y| \le b$)

5) Отношение расстояния r_i от точки эллипса до фокуса F_i к расстоянию d_i от этой точки до отвечающей фокусу директрисы равно эксцентриситету эллипса.

Доказательство.

Расстояния от точки $M(x, y)$ до фокусов эллипса можно представить так:

$$r_1 = a + \frac{c}{a}x = a + ex, \quad r_2 = a - \frac{c}{a}x = a - ex.$$

Составим уравнения директрис:

$$-x - \frac{a}{e} = 0\,(D_1), \quad x - \frac{a}{e} = 0\,(D_2).$$

Тогда

$$d_1 = \frac{a + ex}{e}, \quad d_2 = \frac{a - ex}{e}.$$

Отсюда $r_i / d_i = e$, что и требовалось доказать.

Гипербола

Гиперболой называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная.

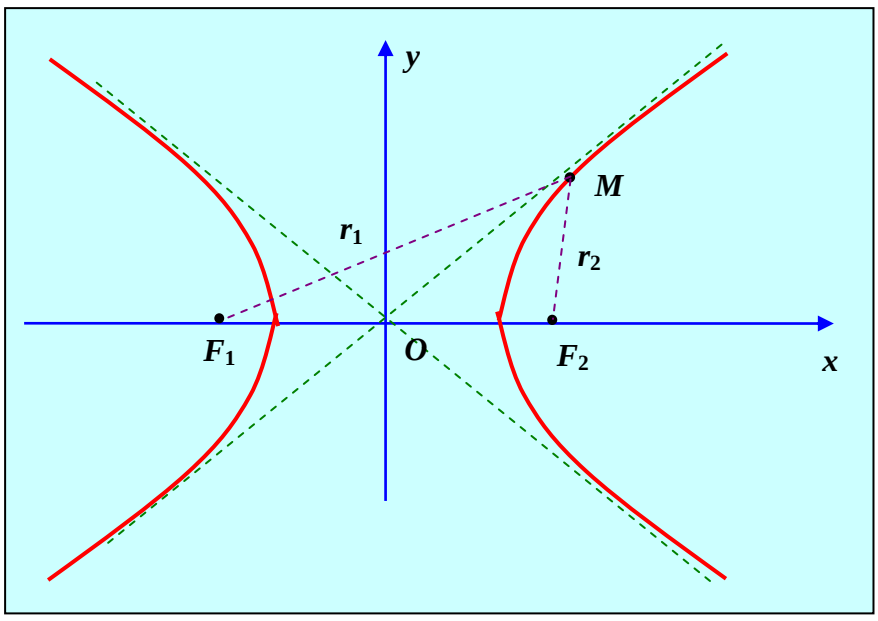


Рис. 2

Выведем каноническое уравнение гиперболы по аналогии с выводом уравнения эллипса, пользуясь теми же обозначениями.

$|r_1 - r_2| = 2a$, откуда

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

Если обозначить $b^2 = c^2 - a^2$, отсюда можно получить

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad - \qquad (2)$$

каноническое уравнение гиперболы.

Эксцентриситетом гиперболы называется величина $e = c / a$. *Директрисой* D_i гиперболы, отвечающей фокусу F_i, называется прямая, расположенная в одной полуплоскости с F_i относительно оси Oy перпендикулярно оси Ox на расстоянии a / e от начала координат.

Свойства гиперболы:

1) Гипербола имеет две оси симметрии (главные оси гиперболы) и центр симметрии (центр гиперболы). При этом одна из этих осей пересекается с гиперболой в двух точках, называемых вершинами гиперболы. Она называется действительной осью гиперболы (ось Ox для канонического выбора координатной системы). Другая ось не имеет общих точек с гиперболой и называется ее мнимой осью (в канонических координатах – ось Oy). По обе стороны от нее расположены правая и левая ветви гиперболы. Фокусы гиперболы располагаются на ее действительной оси.
2) Ветви гиперболы имеют две асимптоты, определяемые уравнениями

$$y = \frac{b}{a}x \quad и \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

3) Наряду с гиперболой (2) можно рассмотреть так называемую сопряженную гиперболу, определяемую каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

для которой меняются местами действительная и мнимая ось с сохранением тех же асимптот.

4) Эксцентриситет гиперболы $e > 1$.

5) Отношение расстояния r_i от точки гиперболы до фокуса F_i к расстоянию d_i от этой точки до отвечающей фокусу директрисы равно эксцентриситету гиперболы.

Доказательство можно провести так же, как и для эллипса.

Парабола

Параболой называется множество точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки F этой плоскости равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой. Точка F называется *фокусом* параболы, а прямая – ее *директрисой*.

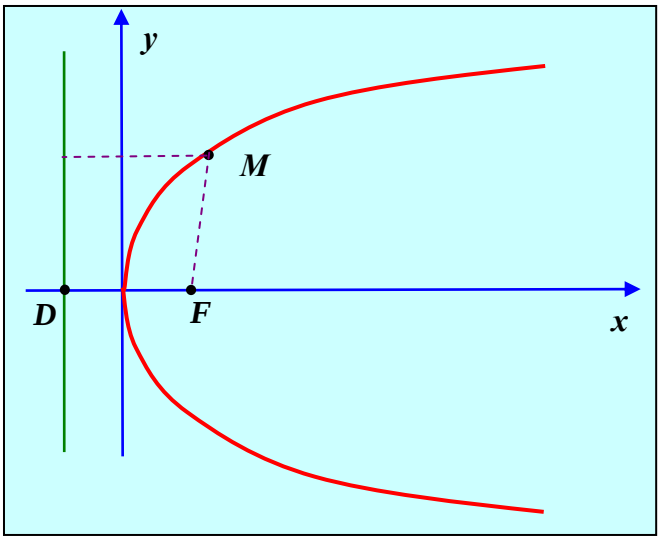


Рис. 3

Для вывода уравнения параболы выберем декартову систему координат так, чтобы ее началом была середина перпендикуляра *FD*, опущенного из фокуса на директрису, а координатные оси располагались параллельно и перпендикулярно директрисе. Пусть длина отрезка *FD* равна *p*. Тогда из равенства $r = d$ следует, что

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}=\frac{p}{2}+x,$$

поскольку

$$r=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2},\quad d=\frac{p}{2}+x.$$

Алгебраическими преобразованиями это уравнение можно привести к виду:

$$y^2=2px, \qquad (3)$$

называемому *каноническим уравнением параболы*. Величина *p* называется *параметром* параболы.

Свойства параболы:

1) Парабола имеет ось симметрии (ось параболы). Точка пересечения параболы с осью называется вершиной параболы. Если парабола задана каноническим уравнением, то ее осью является ось *Ox,* а вершиной – начало координат.
2) Вся парабола расположена в правой полуплоскости плоскости *Oxy.*

Замечание. Используя свойства директрис эллипса и гиперболы и определение параболы, можно доказать следующее утверждение:

Множество точек плоскости, для которых отношение *e* расстояния до некоторой фиксированной точки к расстоянию до некоторой прямой есть

величина постоянная, представляет собой эллипс (при $e<1$), гиперболу (при $e>1$) или параболу (при $e=1$).

Приведение уравнения второго порядка к каноническому виду

Линия, определяемая общим уравнением второго порядка

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c=0, \quad (4)$$

называется *алгебраической линией второго порядка*.

Для квадратичной формы $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ можно задать матрицу

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы перейти к новой системе координат, в которой уравнение линии будет иметь канонический вид, необходимо провести два преобразования:

1) поворот координатных осей на такой угол, чтобы их направление совпало с направлением осей симметрии кривой (если она имеет две оси);
2) параллельный перенос, при котором начало координат совмещается с центром симметрии кривой (если он существует).

Замечание. Для параболы новые оси координат должны располагаться параллельно и перпендикулярно директрисе, а начало координат – совпасть с вершиной параболы.

Поскольку в канонических уравнениях кривых второго порядка отсутствуют произведения переменных, необходимо перейти к координатной системе, определяемой базисом из ортонормированных собственных векторов матрицы A. В этом базисе уравнение (4) примет вид:

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+2\tilde{b}_1x'+2\tilde{b}_2y'+\tilde{c}=0$$

(в предположении, что $\lambda_{1,2}$ не равны 0).

Зададим последующий параллельный перенос формулами:

$$x''=x'+\frac{\tilde{b}_1}{\lambda_1}, \quad y''=y'+\frac{\tilde{b}_2}{\lambda_2}..$$

Получим в новой координатной системе уравнение

$$\lambda_1x''^2+\lambda_2y''^2=\tilde{\tilde{c}}. \qquad (5)$$

Рассмотрим возможные геометрические образы, определяемые этим уравнением в зависимости от знаков λ_1, λ_2 и $\tilde{\tilde{c}}$:

1) если собственные числа матрицы A λ_1 и λ_2 и $\tilde{\tilde{c}}$ одного знака, уравнение (5) представляет собой каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=1, \quad где \quad a=\sqrt{\frac{\tilde{\tilde{c}}}{\lambda_1}}, b=\sqrt{\frac{\tilde{\tilde{c}}}{\lambda_2}}$$

(случаи $\tilde{\tilde{c}}=0$ и $\tilde{\tilde{c}}$, имеющего знак, противоположный знаку λ_1, λ_2, будут рассмотрены позднее).

2) если λ_1 и λ_2 имеют разные знаки, уравнение (5) является каноническим уравнением гиперболы:

$$\frac{x''^2}{a^2}-\frac{y''^2}{b^2}=1 \quad или \quad \frac{x''^2}{a^2}-\frac{y''^2}{b^2}=-1,$$

в зависимости от знака $\tilde{\tilde{c}}$.

В случае, когда одно из собственных чисел матрицы A равно 0, уравнение (4) в результате двух преобразований координат можно привести к виду:

$$y''^2=2\tilde{\tilde{b}}x'',$$

являющимся каноническим уравнением параболы.

Пример 1.

Приведем к каноническому виду уравнение второго порядка

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0.$$

Матрица квадратичной формы $3x^2 + 10xy + 3y^2$ имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 3\end{pmatrix}.$$

Найдем ее собственные числа и собственные векторы. Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 5\\ 5 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0, \lambda^2-6\lambda-16=0, \lambda_1=8, \lambda_2=-2.$$

Для координат собственного вектора $\boldsymbol{e_1}$, соответствующего λ_1, получим с учетом нормировки:

$$\begin{cases}-5x_1+5y_1=0\\ x_1^2+y_1^2=1\end{cases}, \quad откуда \quad \mathbf{e}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Аналогично найдем $\boldsymbol{e_2}$:

$$\begin{cases}5x_2+5y_2=0\\ x_2^2+y_2^2=1\end{cases}, \quad \mathbf{e}_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Составим матрицу перехода к новому базису, столбцами которой будут координаты собственных векторов:

$$B=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{cases}.$$

Подставив эти выражения в исходное уравнение, получим его вид в новой системе координат:

$$8x'^2 - 2y'^2 - 8\sqrt{2}x' - 6\sqrt{2}y' - 13 = 0.$$

Заметим, что коэффициентами при x^2 и y^2 являются λ_1 и λ_2.

Преобразуем полученное уравнение:

$$8(x'^2 - \sqrt{2}x' + \frac{1}{2}) - 2(y'^2 + 3\sqrt{2}y' + \frac{9}{2}) - 8 = 0,$$

$$8(x' - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 - 2(y' + \frac{3}{\sqrt{2}})^2 = 8.$$

Зададим параллельный перенос формулами:

$$x'' = x' - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y'' = y' + \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Получим уравнение:

$$8x''^2 - 2y''^2 = 8,$$

а после деления на 8:

$$x''^2 - \frac{y''^2}{4} = 1 \quad -$$

каноническое уравнение гиперболы.

Классификация кривых второго порядка

Рассмотрим общее уравнение второго порядка (4):

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

и выясним, какие геометрические образы на плоскости могут задаваться этим уравнением.

1. Если собственные числа матрицы A λ_1 и λ_2 одного знака, уравнение (4) называется уравнением *эллиптического типа*. Его можно привести к виду (5):

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = \tilde{\tilde{c}},$$

которое, в свою очередь, преобразуется в следующую форму:

а) если $\tilde{\tilde{c}}$ имеет тот же знак, что и $\lambda_{1,2}$, при делении на $\tilde{\tilde{c}}$ получаем

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1 \quad -$$

каноническое уравнение *эллипса***.**

б) если $\tilde{\tilde{c}}$ =0, уравнение

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = 0$$

имеет единственное решение:

$$x'' = y'' = 0,$$

определяющее *точку на плоскости*.

в) если знак $\tilde{\tilde{c}}$ противоположен знаку $\lambda_{1,2}$, уравнение после деления на $\tilde{\tilde{c}}$ примет вид:

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = -1.$$

Множество его решений пусто (иногда это пустое множество называют *мнимым эллипсом*).

2. Если собственные числа матрицы A λ_1 и λ_2 разных знаков, уравнение (4) называется уравнением *гиперболического типа*.

а) при $\tilde{\tilde{c}} \neq 0$ оно сводится к одному из двух видов:

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1 \quad \textit{или} \quad \frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = -1,$$

в зависимости от знака $\tilde{\tilde{c}}$. Оба этих уравнения определяют *гиперболу*.

б) При $\tilde{\tilde{c}}$ =0 получаем уравнение

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 0,$$

эквивалентное двум линейным уравнениям:

$$\frac{x''}{a} = \frac{y''}{b} \quad и \quad \frac{x''}{a} = -\frac{y''}{b},$$

задающим *пару пересекающихся прямых*.

3. Если одно из собственных чисел равно 0, уравнение (4) называется уравнением *параболического типа*, и его можно привести к одному из следующих видов:

а) к уравнению

$$y''^2 = 2\tilde{\tilde{b}}x'',$$

определяющему *параболу*;

б) к уравнению

$$y''^2 = 2\tilde{\tilde{b}}^2, \quad \textit{или} \quad y'' = \pm\tilde{\tilde{b}}\sqrt{2},$$

задающему *пару параллельных прямых*;

в) к уравнению

$$y''^2 = 0,$$

определяющему *одну прямую* (или пару совпадающих прямых);

г) к уравнению

$$y''^2 = -2\tilde{\tilde{b}}^2,$$

не имеющему решений и, следовательно, не определяющему никакого геометрического образа.

Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется множество точек трехмерного пространства, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению вида:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + \\ +2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0 \qquad (6)$$

– уравнению второй степени от трех неизвестных, называемому *общим уравнением поверхности второго порядка*.

Если найти собственные числа и нормированные собственные векторы матрицы квадратичной формы

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

и перейти к системе координат, определяемой базисом из ортонормированных собственных векторов, уравнение (6) можно привести к одному из следующих видов:

1. Если λ_1, λ_2, λ_3 – одного знака, уравнение (6) есть уравнение эллиптического типа и приводится к канонической форме:

$$a) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad - \qquad (7)$$

каноническое уравнение *эллипсоида*.

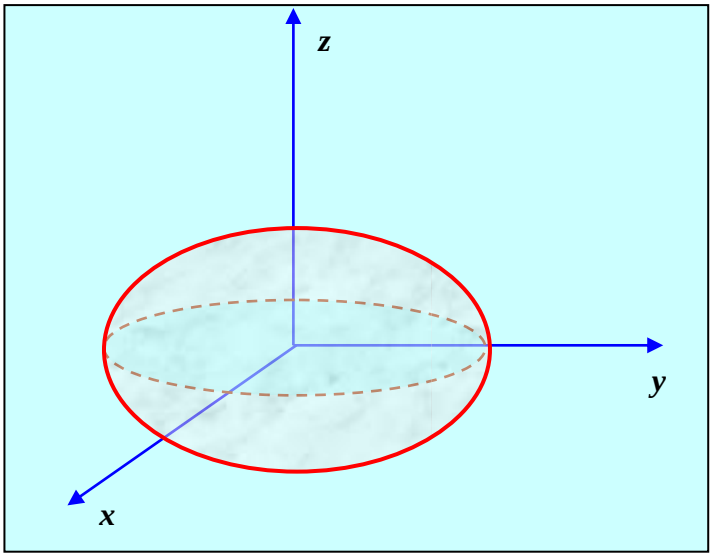


Рис. 4

Замечание. Если два собственных числа совпадают, эллипсоид называется эллипсоидом вращения и представляет собой поверхность, полученную в

результате вращения эллипса вокруг одной из его осей. Если все собственные числа равны, уравнение (7) становится уравнением сферы.

$$б)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0\quad -$$

уравнение задает *точку в пространстве*;

$$в)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1\quad -$$

пустое множество.

2. Если собственные числа разных знаков, уравнение (12.6) приводится к каноническому виду:

$$а)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\quad - \qquad (8)$$

каноническое уравнение *однополостного гиперболоида*,

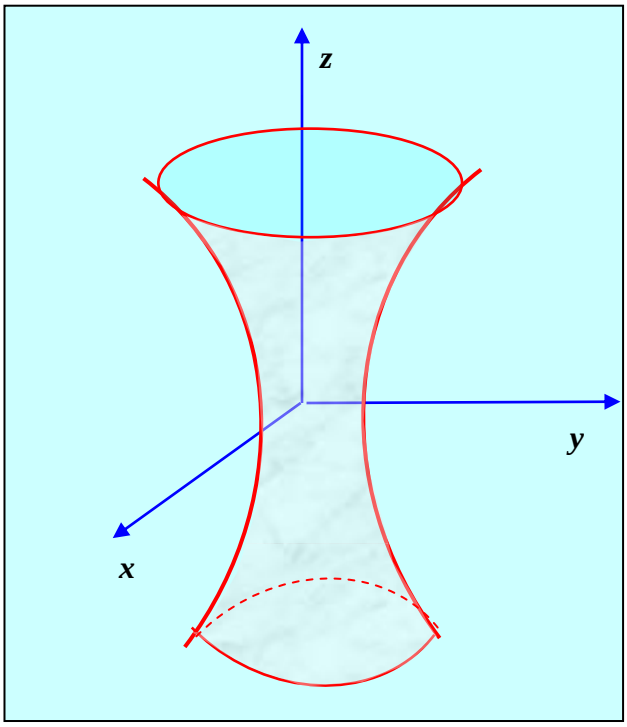


Рис. 5

$$б)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\quad - \qquad (9)$$

каноническое уравнение *двуполостного гиперболоида*,

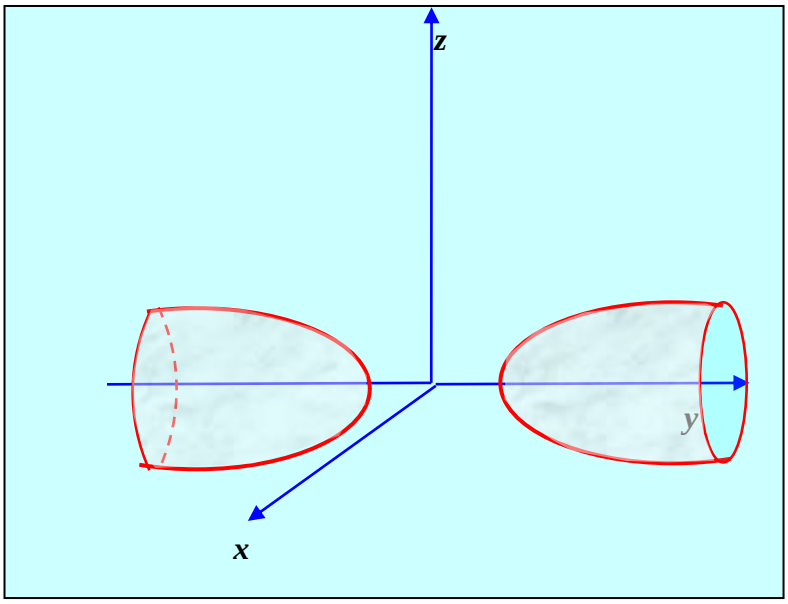


Рис. 6

$$в)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad - \qquad (10)$$

уравнение *конуса второго порядка*.

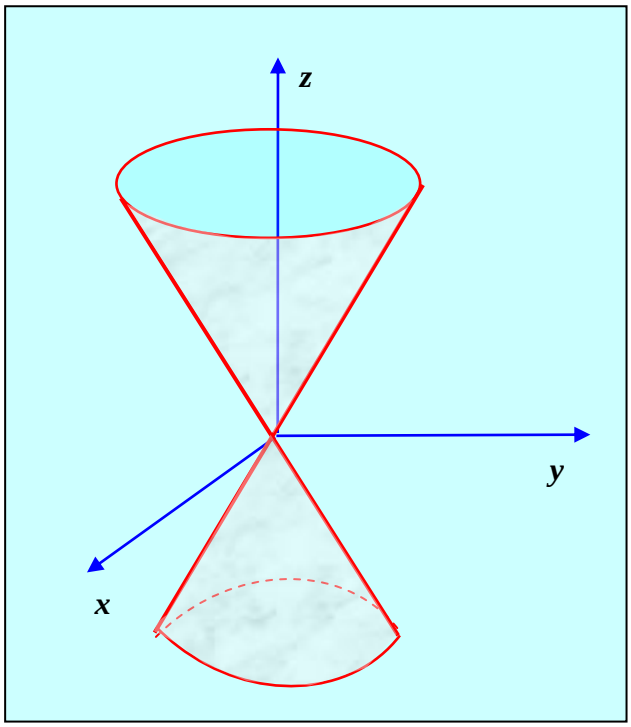


Рис. 7

3. Одно из собственных чисел равно 0. При этом с помощью преобразований координат можно получить следующие формы уравнения (6):

$$а)\quad z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \quad - \qquad (11)$$

каноническое уравнение *эллиптического параболоида*,

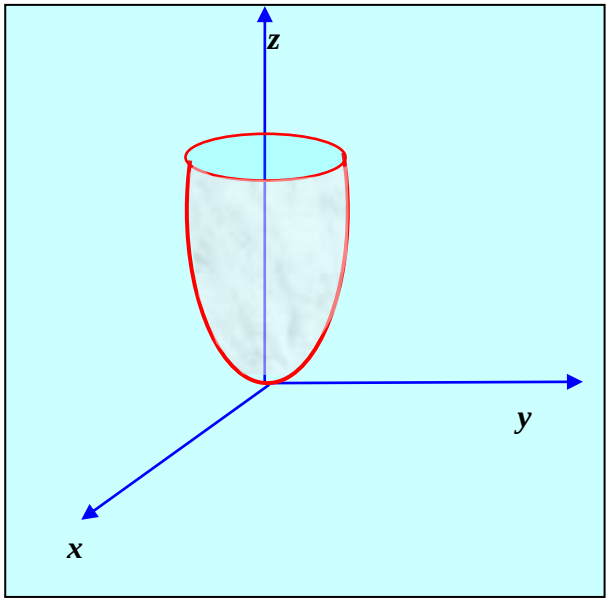


Рис. 8

$$б)\quad z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\quad -\qquad (12)$$

каноническое уравнение *гиперболического параболоида*

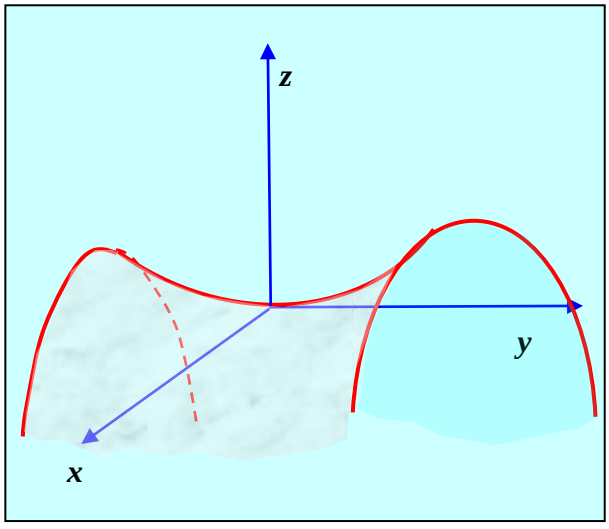


Рис. 9

и уравнения цилиндрических поверхностей:

$$в)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad -\qquad (13)$$

эллиптический цилиндр,

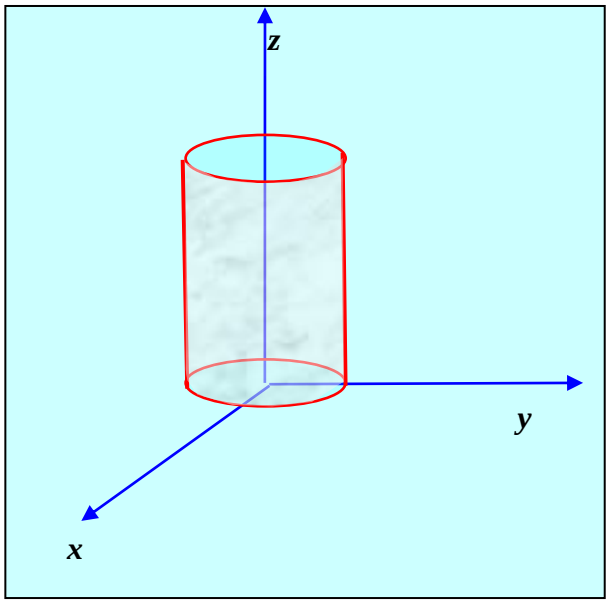


Рис. 10

$$г)\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad - \qquad (14)$$

гиперболический цилиндр.

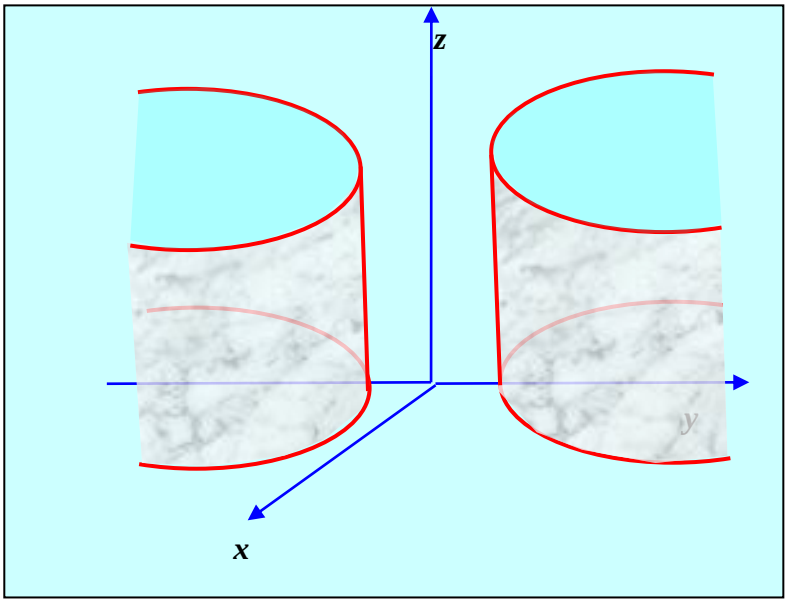


Рис 11

Наконец, уравнение может определять **пару плоскостей**:

$$д)\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0. \qquad (15)$$

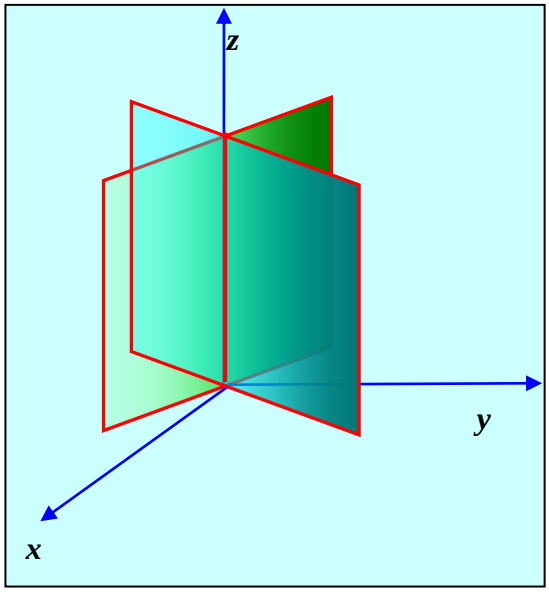


Рис. 12

4. Если два собственных числа равны 0, уравнение (6) приводится к одному из следующих видов:

$$а)\quad a_{33}z^2 + 2qy = 0 \quad - \qquad (16)$$

параболический цилиндр,

$$б)\quad a_{33}z^2 - r^2 = 0 \quad - \qquad (17)$$

пара параллельных плоскостей,

$$в)\quad a_{33}z^2 + r^2 = 0 \quad -$$

пустое множество.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «*Кривые 2-го порядка*»

Задача 1.

Определить тип уравнения кривой 2-го порядка:

$$2x^2 + 10xy + 12y^2 - 7x + 18y - 15 = 0.$$

Указание

Если $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, то уравнение эллиптического типа;

если $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, то уравнение гиперболического типа;

если $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$, то уравнение параболического типа.

Решение

Ответ на вопрос задачи зависит от знаков собственных чисел матрицы квадратичной формы их старших членов левой части уравнения:

Матрица квадратичной формы $2x^2 + 10xy + 12y^2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 12 \end{pmatrix},$$

характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 5 & 12-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 14\lambda - 1 = 0.$$

По теореме Виета $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 < 0$, следовательно, уравнение гиперболического типа.

Ответ: уравнение гиперболического типа.

Задача 2.
Привести уравнение к каноническому виду и указать геометрический образ, который оно определяет:

$$4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0.$$

Указание

В уравнении отсутствует произведение xy, следовательно, квадратичная форма его старших членов имеет канонический вид; поэтому коэффициенты при x^2 и y^2 являются собственными числами матрицы квадратичной формы.

Итак, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, следовательно, перед нами уравнение эллиптического типа.

Решение

В уравнении отсутствует произведение xy, следовательно, квадратичная форма его старших членов имеет канонический вид; поэтому коэффициенты при x^2 и y^2 являются собственными числами матрицы квадратичной формы.

Итак, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, следовательно, перед нами уравнение эллиптического типа.

Геометрические образы, определяемые уравнением эллиптического типа:
- эллипс;
- точка;
- пустое множество («мнимый эллипс»).

Для приведения уравнения к каноническому виду нужно исключить из него слагаемые. Содержащие первые степени переменных. Для этого преобразуем левую часть:

$$(4x^2 - 40x) + (9y^2 + 36y) + 100 = 0,$$
$$4(x^2 - 10x) + 9(y^2 + 4y) + 100 = 0,$$
$$4(x^2 - 10x + 25) - 100 + 9(y^2 + 4y + 4) - 36 + 100 = 0,$$
$$4(x-5)^2 + 9(y+2)^2 = 36.$$

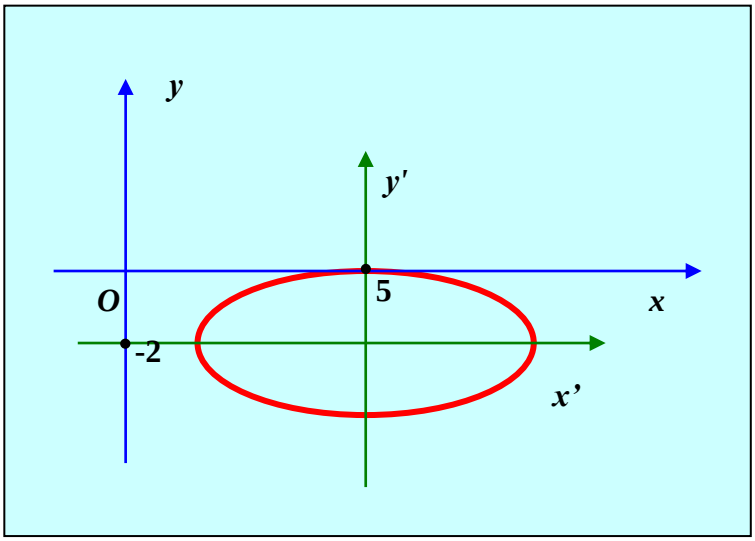


Рис. 13

Зададим параллельный перенос осей координат:

$$\begin{cases} x' = x - 5 \\ y' = y + 2 \end{cases}.$$

Тогда в новых координатах уравнение примет вид:

$$4x'^2 + 9y'^2 = 36 \Rightarrow \frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1 -$$

каноническое уравнение эллипса.

Ответ: уравнение эллипса, канонический вид $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$.

Задача 3.

Привести уравнение к каноническому виду и указать геометрический образ, который оно определяет:

$$32x^2 + 52xy - 7y^2 + 180 = 0.$$

Указание

Собственные числа имеют разные знаки, значит, тип уравнения – гиперболический.

Геометрические образы, определяемые уравнением гиперболического типа:

- гипербола;
- пара пересекающихся прямых.

Решение

$$A=\begin{pmatrix}32 & 26\\ 26 & -7\end{pmatrix},\ \begin{vmatrix}32-\lambda & 26\\ 26 & -7-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

$$\lambda^2-25\lambda-900=0,\ \lambda_1=-20,\ \lambda_2=45.$$

Собственные числа имеют разные знаки, значит, тип уравнения – гиперболический.

Геометрические образы, определяемые уравнением гиперболического типа:
- гипербола;
- пара пересекающихся прямых.

Заметим, что для данного уравнения нет необходимости искать явный вид преобразования координат, приводящего квадратичную форму к каноническому виду. Это связано с тем, что уравнение не содержит линейных членов, а его свободный член не изменится при преобразовании вида

$$\begin{cases}x=a_1x'+b_1y'\\ y=a_2y'+b_2x'\end{cases}.$$

Найденные собственные числа будут коэффициентами при x^2 и y^2 для канонического вида квадратичной формы. Следовательно, в соответствующей координатной системе уравнение примет вид:

$$-20x'^2+45y'^2+180=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20x'^2-45y'^2=180\Rightarrow\frac{x'^2}{9}-\frac{y'^2}{4}=1-$$

каноническое уравнение гиперболы.

Ответ: уравнение гиперболического типа, канонический вид

$$\frac{x'^2}{9}-\frac{y'^2}{4}=1.$$

Задача 4.

Привести уравнение к каноническому виду и указать геометрический образ, который оно определяет:

$$7x^2+60xy+32y^2-14x-60y+7=0.$$

Указание

Перед нами полное уравнение 2-го порядка, и для приведения его к каноническому виду потребуется провести оба преобразования координатных осей: поворот на такой угол, чтобы новые оси стали параллельными собственным векторам матрицы квадратичной формы (это преобразование квадратичной формы к каноническому виду), и параллельный перенос.

Решение

Перед нами полное уравнение 2-го порядка, и для приведения его к каноническому виду потребуется провести оба преобразования координатных осей: поворот на такой угол, чтобы новые оси стали параллельными собственным векторам матрицы квадратичной формы (это преобразование квадратичной формы к каноническому виду), и параллельный перенос.

1) Поворот:

$$A=\begin{pmatrix}7 & 30\\ 30 & 32\end{pmatrix},\ \begin{vmatrix}7-\lambda & 30\\ 30 & 32-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

$$\lambda^2-39\lambda-676=0,\ \lambda_1=52,\ \lambda_2=-13.$$

Итак, тип уравнения – гиперболический.

Собственные векторы:

$$\vec{r}_1=\{x_1;y_1\},\ -45x_1+30y_1=0,\ y_1=\frac{3}{2}x_1,$$

$$\vec{r}_1=c\{2;\ 3\},\ |\vec{r}_1|=1\Rightarrow\vec{r}_1=\left\{\frac{2}{\sqrt{13}};\frac{3}{\sqrt{13}}\right\}.$$

$$\vec{r}_2=\{x_2;y_2\},\ 20x_2+30y_2=0,\ x_2=-\frac{3}{2}y_2,$$

$$\vec{r}_2=c\{-3;\ 2\},\ |\vec{r}_2|=1\Rightarrow\vec{r}_2=\left\{-\frac{3}{\sqrt{13}};\frac{2}{\sqrt{13}}\right\}.$$

Матрица перехода к новому базису:

$$T=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{13}} & -\frac{3}{\sqrt{13}}\\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}}\end{pmatrix},$$

преобразование координат:

$$\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{13}}(2x'-3y')\\ y=\frac{1}{\sqrt{13}}(3x'+2y')\end{cases}..$$

Собственные векторы следует выбирать так, чтобы определитель матрицы перехода равнялся +1 – при этом не нарушается взаимное расположение координатных осей.

Запишем исходное уравнение в новых координатах:

$$\frac{7}{13}(4x'^2-12x'y'+9y'^2)+\frac{60}{13}(2x'-3y')(3x'+2y')+$$

$$+\frac{32}{13}(9x'^2+12x'y'+4y'^2)-\frac{14}{\sqrt{13}}(2x'-3y')-\frac{60}{\sqrt{13}}(3x'+2y')+7=0,$$

$$52x'^2-13y'^2-16\sqrt{13}x-6\sqrt{13}y+7=0,$$

$$52\left(x'^2-\frac{4}{\sqrt{13}}x'+\frac{4}{13}\right)-16-13\left(y'^2+\frac{6}{\sqrt{13}}y+\frac{9}{13}\right)+9+7=0,$$

$$52\left(x'-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2-13\left(y'+\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2=0.$$

2) Параллельный перенос:

$$\begin{cases} x''=x'-\dfrac{2}{\sqrt{13}} \\ y''=y'+\dfrac{3}{\sqrt{13}} \end{cases}.$$

В новых координатах получаем уравнение

$$52x''^2-13y''^2=0,\quad y''^2=4x''^2,\quad y''=\pm 2x''\quad -$$

пара пересекающихся прямых.

Ответ: уравнение гиперболического типа, определяет пару пересекающихся прямых, канонический вид: $y'' = \pm\, 2x''$.

Задача 5.

Не проводя преобразования координат, установить, что уравнение

$$x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x - 12y + 4 = 0$$

определяет прямую, и найти уравнение этой прямой.

Указание

Обратите внимание на то, что квадратичная форма, образованная старшими членами уравнения, является полным квадратом.

Решение

Иногда привести уравнение к простому виду удается с помощью алгебраических приемов. Представим левую часть уравнения в виде:

$(x - 3y)^2 + 4(x - 3y) + 4 = 0,\ ((x - 3y) + 2)^2 = 0,\ x - 3y + 2 = 0.$

Ответ: уравнение определяет прямую $x - 3y + 2 = 0$.

Задача 6.

Эллипс, симметричный относительно осей координат, проходит через точки

$$M = \ 2\sqrt{3}, \sqrt{6} \quad u \quad A = \ 6, 0\ .$$

Найти его эксцентриситет.

Указание

По условию задачи оси координат являются осями симметрии эллипса, поэтому, во-первых, его уравнение имеет канонический вид, а во-вторых, полуось a равна абсциссе точки A.

Решение

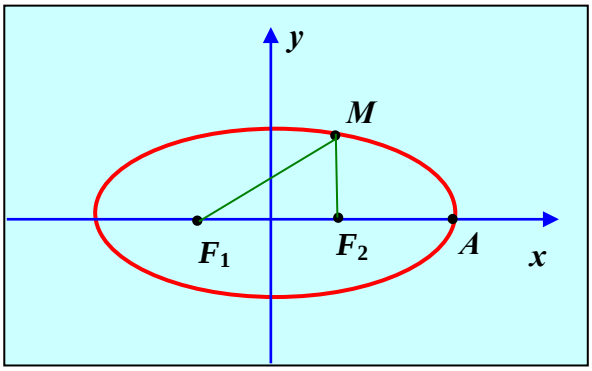


Рис. 14

По условию задачи оси координат являются осями симметрии эллипса, поэтому, во-первых, его уравнение имеет канонический вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

а во-вторых, полуось a равна абсциссе точки A, т.е. $a = 6$. Найдем b, подставив в уравнение эллипса координаты точки M:

$$\frac{12}{36}+\frac{6}{b^2}=1,\quad \frac{6}{b^2}=\frac{2}{3},\quad b^2=9,\quad b=3.$$

Итак, уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Тогда расстояние от фокуса до начала координат

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-9}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}.$$

Вычислим эксцентриситет эллипса:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: эксцентриситет $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Задача 7.

Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на прямой $y + 6 = 0$, эксцентриситет равен $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, а точка $M(3; -1)$ является концом малой полуоси.

Указание

Найдите расстояние от точки M до прямой $y + 6 = 0$, т.е. длину малой полуоси эллипса. Центром симметрии эллипса будет точка O пересечения прямых F_1F_2 ($y + 6 = 0$) и MO, проходящей через точку M перпендикулярно F_1F_2.

Решение

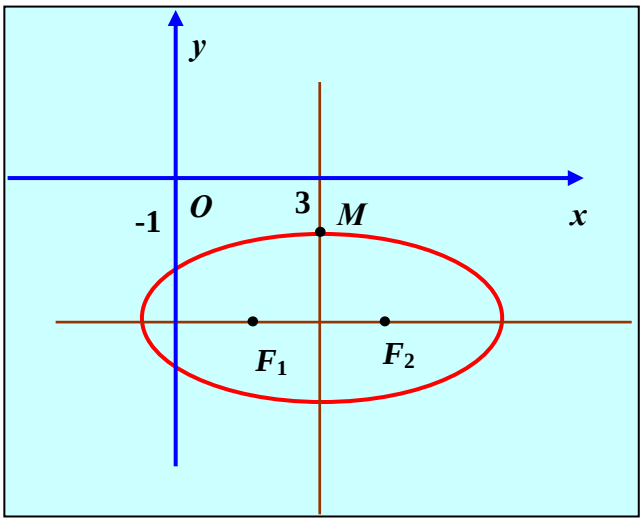


Рис. 15

Найдем расстояние от точки M до прямой $y + 6 = 0$, т.е. длину малой полуоси эллипса. Нормальный вид уравнения данной прямой: $-y - 6 = 0$, тогда

$$d_M = |-(-1) - 6| = |1 - 6| = 5.$$

Центром симметрии эллипса будет точка O пересечения прямых F_1F_2 ($y + 6 = 0$) и MO, проходящей через точку M перпендикулярно F_1F_2.

Поскольку прямая F_1F_2 параллельна оси абсцисс, прямая MO параллельна оси ординат; следовательно, ее уравнение: $x = 3$. Тогда координаты точки O: $O(3; -6)$.

С учетом расположения осей эллипса можно утверждать, что в системе координат, полученной параллельным переносом начала координат в точку $O(3; -6)$, то есть заданной преобразованием

$$\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y + 6' \end{cases}$$

уравнение эллипса имеет канонический вид:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Найдем a из условия, что

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{a^2 - 25}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{a^2 - 25}{a^2} = \frac{1}{2}, \quad a^2 = 50.$$

Подставим найденные значения a и b в уравнение эллипса:

$$\frac{x'^2}{50}+\frac{y'^2}{25}=1 \Rightarrow x'^2+2y'^2=50 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-3)^2+2(y+6)^2=50 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-6x+9+2y^2+24y+72-50=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+2y^2-6x+24y+31=0.$$

Ответ: уравнение эллипса: $x^2 + 2y^2 - 6x + 24y + 31 = 0$.

Задача 8.
Дана гипербола

$$16x^2 - 9y^2 = 144.$$

Составить уравнения директрис гиперболы.

Указание

Приведите уравнение гиперболы к каноническому виду и составьте уравнения директрис в виде

$$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}, \quad \varepsilon=\frac{c}{a}.$$

Решение

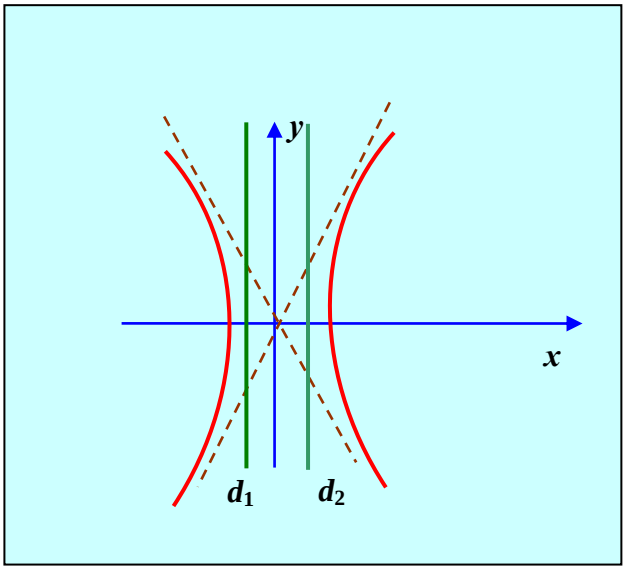


Рис. 16

Приведем уравнение гиперболы к каноническому виду:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1.$$

Осями симметрии являются координатные оси, $a = 3$, $b = 4$. Тогда

$$F_1O=c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}=5; \quad \varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}.$$

Уравнения директрис:

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm 3 : \frac{5}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{9}{5}.$$

Ответ: уравнения директрис: $x = \pm\frac{9}{5}$.

Задача 9.

Написать уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$

Указание

Найдите вначале координаты вершин и фокусов эллипса, а затем определите коэффициенты *a* и *b* в каноническом уравнении гиперболы.

Решение

Координаты вершин гиперболы: (*a*; 0) и (-*a*; 0), координаты фокусов: (*c*; 0) и (–*c*; 0). Соответственно координаты вершин эллипса: (a_1; 0) и (-a_1; 0), координаты фокусов: (c_1; 0) и (-c_1; 0). У данного эллипса $a_1 = 5$,

$$c_1 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4.$$

Тогда для гиперболы $a = 4$, $c = 5$, откуда

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3,,$$

и уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Ответ: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$

Задача 10.

Составить уравнение касательной к гиперболе

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

в ее точке $M=\{15;\ 4\sqrt{6}\}$.

Указание

Найдите вначале координаты нормали к гиперболе в точке *M* (если кривая задана уравнением $F(x,y) = 0$, то нормаль к ней в точке $M_0=\{x_0;y_0\}$ имеет координаты: $\boldsymbol{n} = (F'_x(x_0;y_0);F'_y(x_0;y_0))$), а затем составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M=\{15;\ 4\sqrt{6}\}$ перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n}$.

Решение

Найдем координаты нормали к гиперболе в точке M.

Если кривая задана уравнением $F(x,y) = 0$, то нормаль к ней в точке $M_0=\{x_0;y_0\}$ имеет координаты: $\mathbf{n} = (F'_x(x_0;y_0);F'_y(x_0;y_0))$.

$$F'_x = \frac{2x}{9},\ F'_y = -\frac{2y}{4} = -\frac{y}{2},\ F'_x(15;\ 4\sqrt{6}) = \frac{2\cdot 15}{9} = \frac{10}{3},$$

$$F'_y(15;\ 4\sqrt{6}) = -\frac{4\sqrt{6}}{2} = -2\sqrt{6} \Rightarrow \mathbf{n} = \left\{\frac{10}{3}; -2\sqrt{6}\right\}.$$

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{n} = \{A, B\}$, имеет вид: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Запишем уравнение касательной:

$$\frac{10}{3}(x-15) - 2\sqrt{6}(y-4\sqrt{6}) = 0,$$

$$\frac{10}{3}x - 50 - 2\sqrt{6}y + 48 = 0,\ 5x - 3\sqrt{6}y - 3 = 0.$$

Ответ: Уравнение касательной:

$$5x - 3\sqrt{6}y - 3 = 0.$$

Задача 11.

Составить уравнение параболы, если даны ее фокус $F(2; -1)$ и директриса $x - y - 1 = 0$.

Указание

Используйте определение параболы: параболой называется геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до фокуса равно расстоянию до директрисы.

Решение

Используем определение параболы:

***Параболой** называется геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до фокуса равно расстоянию до директрисы.*

Пусть точка $M(x, y)$ лежит на параболе. Тогда ее расстояние до фокуса

$$MF = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2}.$$

Выразим через x и y расстояние от точки M до директрисы.
Нормальное уравнение директрисы:

$$\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0; \quad d_M = \left|\frac{x-y-1}{\sqrt{2}}\right|.$$

Из определения параболы $d_M = MF$,

$$\left|\frac{x-y-1}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2};$$

$$\frac{(x-y-1)^2}{2} = (x-2)^2 + (y+1)^2,$$

$$x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0.$$

Ответ: уравнение параболы: $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$.

Задача 12.
Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если известно, что парабола симметрична относительно оси Ox и проходит через точку $A=\{9; 6\}$. Найти координаты ее фокуса.

Указание

Из условий задачи следует, что данная парабола задается каноническим уравнением

$$y^2 = 2px.$$

Подставьте в это уравнение координаты точки A и найдите значение параметра p параболы.

Решение

Из условий задачи следует, что данная парабола задается каноническим уравнением

$$y^2 = 2px.$$

Подставим в это уравнение координаты точки A: $36 = 2p \cdot 9$, откуда $p = 2$.
Следовательно, уравнение параболы имеет вид: $y^2 = 4x$.
Координаты фокуса параболы задаются формулой: $F=\{0{,}5p; 0\}$, то есть $F=\{1; 0\}$.

Ответ: уравнение параболы: $y^2 = 4x$; фокус $F=\{1; 0\}$.

ГЛОССАРИЙ

базисный минор – ненулевой минор, порядок которого равен рангу матрицы
вектор – направленный отрезок
векторное произведение векторов – вектор, перпендикулярный обоим сомножителям, образующий с ними правую тройку, модуль которого равен произведению модулей сомножителей на синус угла между ними
гипербола – множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний до некоторых двух фиксированных точек есть величина постоянная
канонические уравнения прямой – уравнения, использующие координаты направляющего вектора прямой
канонический вид квадратичной формы – квадратичная форма. не содержащая произведения переменных
квадратичная форма действительных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – многочлен второй степени относительно этих переменных, не содержащий свободного члена и членов первой степени
коллинеарные векторы – векторы, параллельные одной прямой
компланарные векторы – векторы, параллельные одной плоскости
кривые второго порядка – линии пересечения кругового конуса с плоскостями, не проходящими через его вершину (эллипс, гипербола, парабола)
линейная комбинация – результат применения линейных операций
линейное уравнение – уравнение, в которое неизвестные входят в виде линейной комбинации
линейные операции – сложение и умножение на число
матрица – прямоугольная таблица из чисел
минор матрицы – определитель, составленный из элементов матрицы, стоящих на пересечении любых ее k строк и k столбцов
направляющий вектор прямой – вектор, параллельный прямой
нормальное уравнение прямой (плоскости) – уравнение, коэффициенты которого вычисляются с помощью характеристик перпендикуляра, проведенного к прямой (плоскости) из начала координат
нормальный вектор прямой (плоскости) – вектор, перпендикулярный прямой (плоскости)
определенная система уравнений – система, имеющая единственное решение
определитель – число, поставленное в соответствие квадратной матрице
отклонение точки от прямой (плоскости) – расстояние от точки до прямой (плоскости), если точка и начало координат лежат по разные стороны от прямой (плоскости), или величина, противоположная по знаку, в противном случае
парабола – множество точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой

ранг матрицы – наибольший порядок ее ненулевого минора
симметрическая матрица – матрица, у которой равны элементы, симметричные относительно главной диагонали
скалярное произведение векторов – произведение модулей векторов, умноженное на косинус угла между ними
скалярный квадрат вектора – скалярное произведение вектора на себя
смешанное произведение трех векторов – скалярное произведение одного вектора на векторное произведение двух других
собственное число матрицы – число, для которого результат умножения матрицы на некоторый вектор равен его произведению на это число
собственный вектор матрицы – вектор, для которого умножение на матрицу равносильно умножению на число
совместная система уравнений – система, имеющая хотя бы одно решение
эллипс – множество точек плоскости, для которых сумма расстояний до некоторых двух фиксированных точек есть величина постоянная

ОБОЗНАЧЕНИЯ

$A = \|\|a_{ij}\|\|$	Матрица A
$\sum_{j=1}^{n} a_j$	Сумма $a_1 + a_2 + ... + a_n$
$\|A\|$	Определитель квадратной матрицы
A^T	Транспонированная матрица
A^{-1}	Обратная матрица
E	Единичная матрица
rg A	Ранг матрицы
$\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}$	Вектор
$\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$	Коллинеарные векторы
$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$	Базис декартовой системы координат
$\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1)$	Координаты вектора
$A = \{ x_1, y_1, z_1\}$	Координаты точки
$\text{пр}_l \overrightarrow{AB}$	Проекция вектора на ось
$\vec{e}_a$	Орт вектора $\boldsymbol{a}$
$\|\boldsymbol{a}\|$	Модуль вектора
$\boldsymbol{ab}$	Скалярное произведение векторов
$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$	Векторное произведение векторов
$\boldsymbol{abc}$	Смешанное произведение векторов
$\perp$	Знак перпендикулярности
$\in$	знак принадлежности
$\Rightarrow$	знак следования
$\Leftrightarrow$	знак равносильности
$\cup$	знак объединения

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра – М.: Наука, 1999.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия – М.: Наука, 1999.
3. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах – М.: Физматлит, 2001.
4. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре – М.: Наука, 1984.
5. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре – М.: Наука, 1968.
6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 – М.: Высшая школа, 1996.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Методические указания……..3

1. Линейная алгебра……4

1.1. Матрицы……4
1.1.1. Матрицы. Операции над матрицами……4
1.1.2. Определители матриц……..18
1.1.3. Определитель произведения матриц. Обратная матрица…….37

1.2. Системы линейных алгебраических уравнений…….…..48
1.2.1. Системы с квадратной матрицей. Решение с помощью обратной матрицы. Правило Крамера…….48
1.2.2. Ранг матрицы…….57
1.2.3. Решение систем линейных уравнений в общем случае. Теорема Кронекера-Капелли…….68

2. Аналитическая геометрия……87

2.1. Векторная алгебра……..87
2.1.1. Линейные операции над векторами. Скалярное произведение…….….87
2.1.2. Векторное и смешанное произведения……..…..107

2.2. Прямые и плоскости…….118
2.2.1. Уравнение прямой на плоскости……..118
2.2.2. Уравнения плоскости в пространстве. Уравнения прямой в пространстве……..……138

2.3. Линейные операторы и кривые 2-го порядка……154
2.3.1. Линейные операторы и квадратичные формы……154
2.3.2. Кривые и поверхности 2-го порядка……174

Глоссарий…….200
Обозначения……202
Литература……...203