Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«МАТИ» – Российский государственный технологический
университет им. К.Э. Циолковского

Кафедра «Высшая математика»

Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами
Устойчивость решений
Методические указания для студентов и преподавателей

Составитель: Заварзина И.Ф.
Кулакова Р.Д.

Москва 2008

Методические указания предназначены для студентов второго курса, изучающих в рамках курса высшей математики тему «Дифференциальные уравнения». В них рассматривается решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Кроме того, рассматривается устойчивость по Ляпунову, исследуются точки покоя. Приводятся примеры решения задач. Для закрепления материала студентам предлагается выполнить самостоятельную работу.

<u>I. Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.</u>

1.1. Общие понятия.

Во многих задачах математики, физики и техники требуется определить сразу несколько функций, связанных между собой дифференциальными уравнениями. Совокупность таких уравнений называется системой дифференциальных уравнений.

Рассмотрим неоднородную систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которую называют нормальной системой:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + b_1(t) \\ \dfrac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots a_{2n}y_n + b_2(t) \\ \dfrac{dy_n}{dt} = a_{n_1}y_1 + a_{n_2}y_2 + \ldots + a_{n_n}y_n + b_n(t) \end{cases} \qquad (1.1),$$

где y_i, $i = 1,2,\ldots,n$ – искомые функции; a_{ij}, $i = 1,\ldots,n$; $j = 1,\ldots,n$ – постоянные действительные коэффициенты, $b_i(t)$, $i = 1,\ldots,n$ – заданные непрерывные функции.

Если $b_i(t) \equiv 0$, то система называется однородной.

Систему (1.1) можно зависать в векторной форме.

Введем обозначения:

$$\bar{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}; \quad \bar{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}; \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1.2).$$

Система (1.1) принимает вид:

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = A\bar{y} + \bar{b}(t) \qquad (1.3).$$

Однородная система линейных уравнений в векторной форме имеет вид:

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = A\bar{y} \qquad (1.4).$$

Решение системы линейных дифференциальных уравнений представляется совокупностью функций: $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ (1.5).

Система функций (1.5) называется фундаментальной системой решений. Линейная комбинация фундаментальной системы решений позволяет записать общее решение системы (1.4) в виде:

$$\bar{y}(t,\bar{c}) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot y_i(t) \qquad (1.6).$$

Если при решении системы дифференциальных уравнений задаются начальные условия, которые в векторной форме имеют вид: $\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$ (1.7), тогда определяется единственное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

В курсе лекций доказывается, что общее решение системы (1.3) представляется в виде суммы общего решения однородной системы дифференциальных уравнений (1.4), записанного в виде (1.6) и какого-нибудь частного решения неоднородной системы.

Рассмотрим получение решения однородной системы (1.4).

Будем искать частное решение системы в следующем виде:

$$y_1 = p_1 \cdot e^{kt}, y_2 = p_2 \cdot e^{kt}, \ldots, y_n = p_n \cdot e^{kt} \qquad (1.8),$$

$p_1, p_2, \ldots, p_n$, k – константы, которые подлежат определению.

Подставим (1.8) в систему (1.4) и получим:

$$\begin{cases} kp_1e^{kt} = (a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + \ldots + a_{1n}p_n)e^{kt} \\ kp_2e^{kt} = (a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{2n}p_n)e^{kt} \\ kp_ne^{kt} = (a_{n1}p_1 + a_{n2}p_2 + \ldots + a_{nn}p_n)e^{kt} \end{cases} \qquad (1.9)$$

Упростим систему (1.9):

$$\begin{cases} (a_{11} - k)p_1 + a_{12}p_2 + \ldots + a_{1n}p_n = 0 \\ a_{21}p_1 + (a_{22} - k)p_2 + \ldots + a_{2n}p_n = 0 \\ a_{n1}p_1 + a_{n2}p_2 + \ldots + (a_{nn} - k)p_n = 0 \end{cases} \qquad (1.10)$$

Система (1.4) – однородная система дифференциальных уравнений. Эта система имеет тривиальное решение: $y_1(t) = y_2(t) = \ldots = y_n(t) \equiv 0$, если определитель системы (1.10)

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - k \end{vmatrix} \qquad (1.11)$$

отличен от нуля, а нас интересует частное решение системы (1.4), представленное в виде (1.8) и отличное от тривиального.

Нетривиальное решение (1.8) будет получено при условии равенства нулю определителя (1.11).

Приравнивая определитель (1.11) нулю, получим уравнение относительно k, которое называется характеристическим уравнением:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \mathbf{K} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \mathbf{K} & a_{2n} \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ a_{n1} & a_{n2} & \mathbf{K} & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.12)$$

корни характеристического уравнения (1.12) определяют вид решения (1.8).

1.2. Получение фундаментальной системы решений.

Характеристическое уравнение (1.12) системы (1.4) является уравнением n-ой степени относительно k.

Предположим, что характеристическое уравнение имеет n различных корней $k_1,\ k_2, \mathbf{K}, k_n$, которые являются характеристическими числами матрицы $A(t)$. Каждому характеристическому числу соответствует свой собственный вектор. Для каждого характеристического числа k_i напишем систему (1.10) и определим собственный вектор $(p_{1i};\ p_{2i}; \mathbf{K};\ p_{ni})$, где $i = 1,\ 2, \mathbf{K},\ n$.

Тогда система дифференциальных уравнений имеет n решений:

1-е решение, соответствующее корню $k = k_1$:

$y_{11} = p_{11}e^{k_1 t},\ y_{21} = p_{21}e^{k_1 t}, \mathbf{K},\ y_{n1} = p_{n1}e^{k_1 t}$;

2-е решение, соответствующее корню $k = k_2$:

$y_{12} = p_{12}e^{k_2 t},\ y_{22} = p_{22}e^{k_2 t}, \mathbf{K},\ y_{n2} = p_{n2}e^{k_2 t}$;

…………………………………………………

n-е решение, соответствующее корню $k = k_n$:

$y_{1n} = p_{1n}e^{k_n t},\ y_{2n} = p_{2n}e^{k_n t}, \mathbf{K},\ y_{nn} = p_{nn2}e^{k_n t}$.

Мы получили фундаментальную систему решений. Общее решение системы (1.4) таково:

$$\begin{cases} y_1 = c_1 y_{11} + c_2 y_{12} + \mathbf{K} + c_n y_{1n} \\ y_2 = c_1 y_{21} + c_2 y_{22} + \mathbf{L} + c_n y_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = c_1 y_{n1} + c_2 y_{n2} + \mathbf{K} + c_n y_{nn} \end{cases},$$

где $\tilde{n}_{1.},\ \tilde{n}_2, \mathbf{K},\ \tilde{n}_n$ – произвольные постоянные.

Случаи комплексных и кратных корней рассмотрим на примерах.

1.3. Решение задач.

1. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2 \end{cases}$ Матрица системы A имеет вид $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение матрицы системы (1.12)

$\begin{vmatrix} 2-k & 1 \\ 3 & 4-k \end{vmatrix} = 0$, или $k^2 - 6k + 5 = 0$

Его корни $k_1 = 5,\ k_2 = 1$ – характеристические числа матрицы.

При $k_1 = 5$ система уравнений (1.10) для определения собственного вектора имеют вид

$$\begin{cases} (2-5)\,p_1 + p_2 = 0 \\ 3p_1 + (4-5)\,p_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3p_1 + p_2 = 0 \\ 3p_1 - p_2 = 0 \end{cases}$$

и сводится к одному уравнению $3p_1 - p_2 = 0$.

Это уравнение имеет бесчисленное множество решений. Найдем одно из них $p_1 = 1,\ p_2 = 3$ и запишем в виде вектора (1.3).

При $k_2 = 1$ получаем систему уравнений (1.10):

$$\begin{cases} (2-1)\,p_1 + p_2 = 0 \\ 3p_1 + (4-1)\,p_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 + p_2 = 0 \\ 3p_1 + 3p_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow p_1 + p_2 = 0.$$

Это уравнение определяет вектор $(1, -1)$.

Запишем фундаментальную систему решений: для $k = 5$: $y_{11} = e^{5t}$, $y_{21} = 3e^{5t}$; для $k = 1$: $y_{12} = e^t$, $y_{22} = -e^t$.

Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = c_1 \cdot e^{5t} + c_2 \cdot e^t \\ y_2 = 3c_1 \cdot e^{5t} - c_2 \cdot e^t \end{cases}$$

2. $\begin{cases} y_1' = 4y_1 - 3y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2 \end{cases}$ Матрица системы A имеет вид $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение матрицы системы (1.12):

$\begin{vmatrix} 4-k & -3 \\ 3 & k-4 \end{vmatrix} = 0$, или $(4-k)^2 = -9$;

$k - 4 = \pm 3i,\ k_1 = 4 + 3i,\ k_2 = 4 - 3i$.

Определяем собственные векторы.

При $k_1 = 4 + 3i$ получаем систему уравнений (1.10):

$$\begin{cases}(4-4-3i)\,p_1-3p_2=0\\3p_1+(4-4-3i)\,p_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3ip_1-3p_2=0\\3p_1-3ip_2=0\end{cases}\Rightarrow 3p_1=3ip_2,\ p_1=ip_2.$$

Если $p_2=-i$, тогда $p_1=+1$. Получим собственный вектор $(1,-i)$.

При $k_2=4-3i$ получаем систему уравнений (1.10):

$$\begin{cases}(4-4+3i)\,p_1-3p_2=0\\3p_1+(4-4+3i)\,p_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3ip_1-3p_2=0\\3p_1+3ip_2=0\end{cases}$$

Таким образом $p_1=-ip_2$. Приняв $p_2=i$, находим $p_1=1$, т.е. собственный вектор имеет вид $(1,i)$.

Запишем фундаментальную систему решений:

для $k_1=4+3i$:

$$y_{11}=e^{(4+3i)t}=e^{4t}(\cos 3t+i\sin 3t)$$

$$y_{21}=-ie^{(4+3i)t}=e^{4t}(\sin 3t-i\cos 3t);$$

для $k_2=4-3i$:

$$y_{12}=e^{(4-3i)t}=e^{4t}(\cos 3t-i\sin 3t)$$

$$y_{22}=ie^{(4-3i)t}=e^{4t}(\sin 3t+i\cos 3t).$$

Итак, получаем общее решение:

$$y_1=c_1e^{4t}(\cos 3t+i\sin 3t)+c_2e^{4t}(\cos 3t-i\sin 3t)$$

$$y_2=c_2 3^{4t}(\sin 3t-i\cos 3t)+c_2e^{4t}(\sin 3t+i\cos 3t)$$

т.е.

$$y_1=e^{4t}(c_1+c_2)\cos 3t+e^{4t}(c_1-c_2)\,i\sin 3t$$

$$y_2=e^{4t}(c_1+c_2)\sin 3t+e^{4t}(-c_1+c_2)\,i\cos 3t.$$

Полагая $(c_1+c_2)=c_1^*;\ i(c_1-c_2)=c_2^*$, получаем

$$y_1=e^{4t}c_1^*\cos 3t+e^{4t}c_2^*i\sin 3t$$

$$y_2=e^{4t}c_1^*\sin 3t-e^{4t}c_2^*i\cos 3t.$$

3. Найти фундаментальную систему решений.

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=3y_1-y_2+y_3\\[2mm]\dfrac{dy_2}{dt}=y_1+y_2+y_3\\[2mm]\dfrac{dy_3}{dt}=4y_1-y_2+4y_3\end{cases};$$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix};$$

Запишем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-k & -1 & 1 \\ 1 & 1-k & 1 \\ 4 & -1 & 4-k \end{vmatrix}=0.$$

$$(3-k)(1-k)(4-k)-4-1-4(1-k)+(3-k)+(4-k)=0$$

$$\left(3-4k+k^2\right)(4-k)-5-4+4k+3-k+4-k=0$$

$$12-16k+4k^2-3k+4k^2-k^3+2k-2=0$$

$$-k^3+8k^2-17k+10=0$$

$$k^3-8k^2+17k-10=0.$$

Корни характеристического уравнения:

$k_1=1,\ k_2=2,\ k_3=5.$

Найдем фундаментальную систему решений:

Для $k_1=1$ получим систему уравнений (1.10):

$$\begin{cases} 2p_1-p_2+p_3=0 \\ p_1+p_3=0 \\ 4p_1-p_2+3p_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1=-p_3 \\ -2p_3-p_2+p_3=0 \\ -4p_3-p_2+3p_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1=-p_3 \\ -p_3-p_2=0 \\ -p_3-p_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1=-p_3 \\ p_2=-p_3 \end{cases}$$

Для $k_1=1$ собственный вектор имеет вид $(1,1,-1)$

$y_{11}=e^t;\ y_{21}=e^t;\ y_{31}=e^t.$

Для $k_2=2$ получили систему уравнений (1.10)

$$\begin{cases} p_1-p_2+p_3=0 \\ p_1-p_2+p_3=0 \\ 4p_1-p_2+2p_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1-p_2+p_3=0 \\ 4p_1-p_2+2p_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3p_1+p_3=0 \\ p_2=p_1+p_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_3=-3p_1; \\ p_2=-2p_1, \end{cases}$$

Для $k_2=2$ собственный вектор имеет вид: $(-1,2,3)$.

$y_{12}=-e^{2t};\ y_{22}=2e^{2t};\ y_{32}=3e^{2t}.$

Для $k_3=5$ получим систему уравнений (1.10)

$$\begin{cases} -2p_1 - p_2 + p_3 = 0 \\ p_1 - 4p_2 + p_3 = 0 \\ 4p_1 - p_2 - p_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8p_2 + 2p_3 - p_2 + p_3 = 0 \\ p_1 = 4p_2 - p_3 \\ 16p_2 - 4p_3 - p_2 - p_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9p_2 + 3p_3 = 0 \\ p_1 = 4p_2 - p_3 \\ 15p_2 - 5p_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3p_2 + p_3 = 0 \\ p_1 = 4p_2 - p_3 \\ 15p_2 - p_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_3 = 3p_2 \\ p_1 = 4p_2 - p_3 \end{cases}$$

Для $k_3 = 5$ собственный вектор имеет вид $(5,5,15)$.

$y_{31} = 5e^{5t}$; $y_{32} = 5e^{5t}$; $y_{33} = 15e^{5t}$.

Фундаментальная система решений представляется в виде:

$$\begin{cases} y_1 = c_1 y_{11} + c_2 y_{12} + c_3 y_{13} \\ y_2 = c_1 y_{21} + c_2 y_{22} + c_3 y_{23} \\ y_3 = c_1 y_{31} + c_2 y_{32} + c_3 y_{33}, \text{ или} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = c_1 e^t - c_2 e^{2t} + 5c_3 e^{5t} \\ y_2 = c_1 e^t + 2c_2 e^{2t} + 5c_3 e^{5t} \\ y_3 = -c_1 e^t + 3c_2 e^{2t} + 15c_3 e \end{cases}$$

4. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 5y_1 - y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

Матрица системы A: $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение матрицы системы:

$$\begin{vmatrix} 5-k & -1 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0,\ (5-k)(3-k)+1=0;\ k^2 - 8k + 16 = 0;\ k_1 = k_2 = 4$$

Если k_1 – корень кратности m, то этому корню соответствует решение $y_1 = p_1(t)e^{k_1 t}$, $y_2 = p_2(t)e^{k_2 t}, \mathbf{K}, y_n = p_n(t)e^{k_n t}$, где $p_1(t), p_2(t), \mathbf{K}, p_n(t)$ – многочлены степени не выше $m-1$.

Таким образом, двукратному корню $k = 4$ соответствует решение $y_1 = e^{4t}(a_1 t + a_2)$; $y_2 = e^{4t}(b_1 t + b_2)$.

Дифференцируя y_1 и y_2, получим

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a_1 e^{4t} + 4(a_1 t + a_2) e^{4t}, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = b_1 e^{4t} + 4(b_1 t + b_2) e^{4t}. \end{cases}$$

Значения y_1, y_2, $\dfrac{dy_1}{dt}$, $\dfrac{dy_2}{dt}$ подставим в исходную систему уравнений. После сокращения на e^{4t} имеем

$$\begin{cases} a_1 + 4(a_1 t + a_2) = 5(a_1 t + a_2) - (b_1 t + b_2) \\ b_1 + 4(b_1 t + b_2) = a_1 t + a_2 + 3(b_1 t + b_2) \end{cases}$$

Приравнивая коэффициенты при t и свободные члены, получаем системы уравнений

$$\begin{cases} 4a_1 = 5a_1 - b_1, \\ 4b_1 = a_1 + 3b_1, \end{cases} \begin{cases} a_1 + 4a_2 = 5a_2 - b_2, \\ b_1 + 4b_2 = a_2 + 3b_2. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $a_1 = b_1$, $a_2 - b_2 = a_1 = b_1$.

Полагая $a_1 = c_1$, $a_2 = c_2$, находим $b_1 = c_1$, $b_2 = c_2 - c_1$. Следовательно $y_1 = e^{4t}(c_1 t + c_2)$; $y_2 = e^{4t}(c_1 t + c_2 - c_1)$.

Замечание. Эта система проще решается методом исключения.

II. Устойчивость по Ляпунову, точки покоя системы двух линейных уравнений.

2.1. Определение устойчивости.

Пусть $j(t)$ – решение уравнения $y' = f(t, y)$, определяемое для всех $t > 0$, с начальным значением $j(0)$. Оно называется устойчивым по Ляпунову, если для $\forall e > 0 \exists d(e) > 0$ такое, что все решения $y(t)$, удовлетворяющие при $t = 0$ условию $|y(0) - j(0)| < d(e)$, для всех $t > 0$ существуют и удовлетворяют неравенству $|y(t) - j(t)| < e$.

Решение $j(t)$ называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и, кроме того, существует

$$\lim_{t \to +\infty} |y(t) - j(t)| = 0$$

Разберем на конкретном примере свойство устойчивости решения и условия, входящие в его определение.

Рассмотрим дифференциальное уравнение Бернулли.

$$y' = -2ty - y^2 e^{t^2}$$

Легко проверить, что его общее решение будет иметь вид

$$y(t)=\frac{e^{-t^2}}{t+c}, \text{ ãäå } c=\frac{1}{y(0)}.$$

Иначе можно записать так:

$$y(t)=\frac{y(0)e^{-t^2}}{y(0)\cdot t+1}.$$

1) При начальном условии $y(0)=0$

$$y(t)\equiv 0$$

2) При $y(0)\neq 0$ $\qquad y(t)\frac{y(0)e^{-t^2}}{y(0)\cdot t+1};$

На рис. 2.1 показаны интегральные кривые в области $t>0$. Жирными линиями отмечены решения, исследуемые на устойчивость.

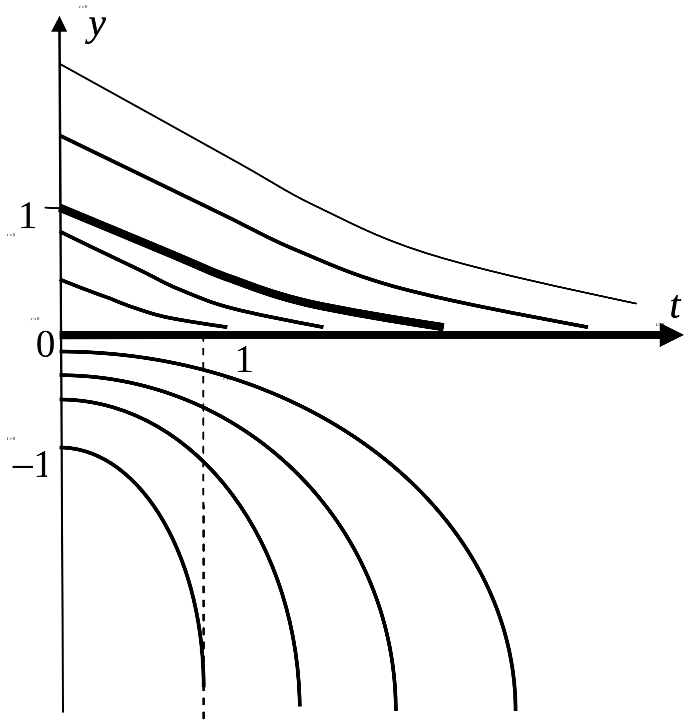

Рис. 2.1

Задача 1. Исследовать на устойчивость решение с начальным значением $y(0)=1$:

$$j(t)=\frac{e^{-t^2}}{1+t}.$$

Это решение определено для всех $t>0$ и поэтому вопрос об устойчивости не лишен смысла.

Пусть $y(0)\geq 0$, тогда все решения с такими начальными условиями

$$y(t)=\frac{y(0)e^{-t^2}}{1+ty(0)}$$

определены для всех $t>0$.

Составим разность

$$\left|y(t)-j\ (t)\right|=\left|\frac{e^{-t^2}\cdot y(0)}{1+t\cdot y(0)}-\frac{e^{-t^2}}{1+t}\right|=e^{-t^2}\ \frac{\left|y(0)-j\ (0)\right|}{(1+t)\left[1+ty(0)\right]}$$

Здесь учтено, что $j\ (0)=1$. Из последующего вытекает, что если $y(0)\geq 0$ и $\left|y(0)-j\ (0)\right|<d$, то $\left|y(t)-j\ (t)\right|<d$ для всех $t>0$.

Следовательно, задавшись любым $e>0$, надо взять $d\,(e)=e$.

Тогда для всех $t>0$ будем иметь, что и $\left|y(t)-j\ (t)\right|<e$.

Более точно: $d\,(e)=\begin{cases} e,\ \text{åñëè}\ 0<e\leq 1 \\ 1,\ \text{åñëè}\ e\geq 1. \end{cases}$

Таким образом исследуемое решение устойчиво.

Кроме того, так как $e^{-t^2}\to 0$ при $t\to\infty$, то и $\left|y(t)-j\ (t)\to 0\right|$.

Поэтому решение $j\ (t)$ также и асимптотически устойчиво. Наличие асимптотической устойчивости хорошо видно на рис.2.1, так как все решения с начальными условиями $y(0)\geq 0$ при $t\to\infty$ асимптотически приближаются к $j\ (t)$.

<u>Задача 2</u>. Для того же уравнения исследовать на устойчивость тривиальное решение $j\ (t)\equiv 0\ \left(j\ (0)=0\right)$.

Возвратимся к формуле

$$y(t)=\frac{y(0)e^{-t^2}}{1+ty(0)}$$

Легко заметить, что при $y(0)<0$ решение $y(t)$ определено не для всех $t>0$, так как при $t=t_*=-\dfrac{1}{y(0)}$ знаменатель обращается в нуль, поэтому при $t\to t_*\ y(t)\to -\infty$.

Так как отрицательное значение $y(0)$ можно взять сколь угодно близким к $j\ (0)=0$, то заключаем, что не существует окрестность точки $j\ (0)$, для которой все решения уравнения существовали бы для всех $t>0$.

Решение $y(t)\equiv 0$ неустойчиво.

Ра рис. 2.1 это можно наглядно проиллюстрировать: решения с отрицательными начальными значениями, начинающиеся сколь угодно близко от $j\ (t)\equiv 0$, неограниченно удаляются от $j\ (t)$, а $\left|y(t)-j\ (t)\right|$ неограниченно возрастает при $t\to -\dfrac{1}{y(0)}$.

2.2 Точки покоя системы дифференциальных уравнений.

Рассмотрим систему

$$
\begin{aligned}
y_1' &= f_1(y_1, y_2) \\
y_2' &= f_2(y_1, y_2)
\end{aligned} \qquad (2.1)
$$

Если точка (y_{10}, y_{20}) удовлетворяет условиям $f_1(y_{10}, y_{20}) = f_2(y_{10}, y_{20}) = 0$, то

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= y_{10}, \\
y_2(t) &= y_{20}
\end{aligned}
$$

есть решение рассматриваемой системы, при этом точку (y_{10}, y_{20}) называют точкой покоя этой системы.

Будем рассматривать однородную систему двух линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 \\
\frac{dy_2}{dt} &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2
\end{aligned}
\right\} \qquad (2.2)
$$

Точка $(0,0)$, очевидно, точка покоя этой системы. Составим характеристический определитель системы

$$
\begin{vmatrix} a_{11} - l & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - l \end{vmatrix} = D(l)
$$

Его корни $l_1,\ l_2$ определяют вид решений и устойчивость точки покоя. Если корни $l_1,\ l_2$ имеют отрицательные вещественные части, то точка покоя устойчива асимптотически. $(\operatorname{Re} l_i < 0,\ i = 1,\ 2)$

Если корни чисто мнимые, т.е. $\operatorname{Re} l_i = 0, (i = 1,\ 2)$, то точка покоя устойчива, но не асимптотически.

Если хотя бы один корень имеет положительную вещественную часть $(\operatorname{Re} l_1 > 0$ или $\operatorname{Re} l_2 > 0)$, то точка покоя неустойчива. Если один корень нулевой, а другой отрицательный, то точка покоя устойчива, но не асимптотически. Если два нулевых корня, то точка может быть как устойчивой не асимптотически, так и неустойчивой.

Наиболее наглядно устойчивость и неустойчивость точки покоя проявляется при рассмотрении фазовых траекторий системы (2.2).

Фазовая траектория системы (2.2) есть кривая на плоскости (y_1, y_2), задаваемая функциями $y_1 = y_1(t),\ y_2 = y_2(t)$, где $y_1(t),\ y_2(t)$ есть решение системы (2.2). На этой кривой обычно стрелками указывают движение точки при возрастании t. В зависимости от корней характеристического уравнения различают следующие точки покоя:

1) если корни вещественные отрицательные, то точку покоя называют устойчивым узлом (рис. 2.2).

2) если корни вещественные положительные, точку покоя называют неустойчивым узлом (рис. 2.3).

3) Если корни вещественные разного знака, то точку покоя называют седлом (рис. 2.4).

4) Если корни комплексные, то при положительных вещественных частях точка покоя есть неустойчивый фокус, при отрицательных – устойчивый фокус (рис. 2.5 и 2.6 соответственно).

5) Если корни чисто мнимые, то точка покоя называется центром (устойчива не асимптотически) (рис. 2.7).

Фазовые траектории вблизи различных точке покоя показаны на рис. 2.2 – 2.7. следует отметить, что для асимптотически устойчивой точки покоя все фазовые траектории при $t \to +\infty$ стремятся к началу координат. В случае неасимптотической устойчивости (центр) фазовые траектории для всех t находятся в ограниченной окрестности начала координат. Для неустойчивой точки покоя существуют траектории, начинающиеся сколь угодно близко к началу и со временем неограниченно удаляющиеся.

2.3. Решение задач

1. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_1 - y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = 2y_1 + 3y_2 \end{cases}$

Решение. $D(l) = \begin{vmatrix} 1-l & 1 \\ 2 & 3-l \end{vmatrix} = l^2 - 4l + 5 = 0$

Корни $D(l)$: $l_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i$, т.е. $\mathrm{Re}\, l_{1,2} = 2 > 0$

Ответ: Точка покоя – неустойчивый фокус (рис. 2.5).

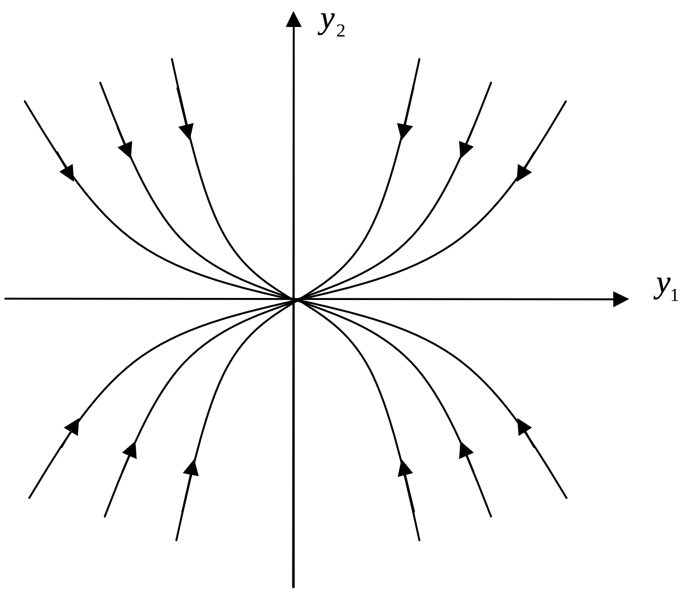

Рис. 2.2

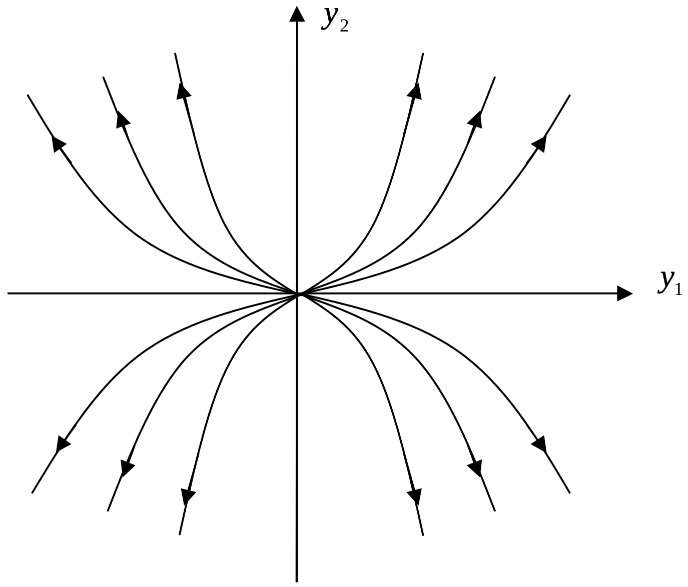

Рис. 2.3

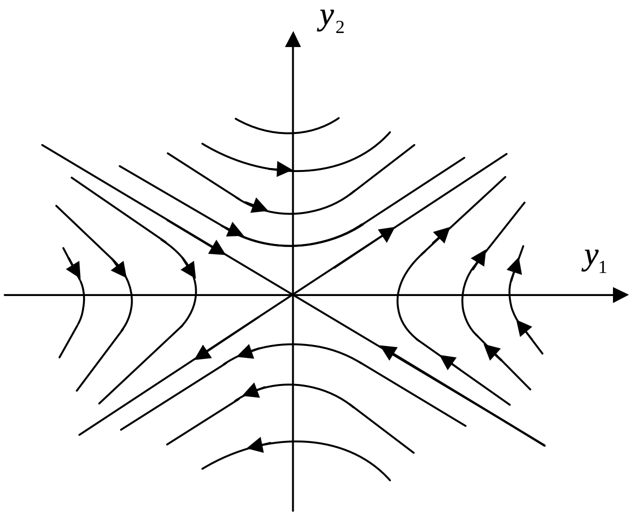

Рис. 2.4.

2. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 4y_2 - y_1 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -9y_1 + y_2 \end{cases}$

<u>Решение</u>.

$$D(l) = \begin{vmatrix} -1-l & 4 \\ -9 & 1-l \end{vmatrix} = l^2 + 35 = 0$$

Корни $D(l)$: $l_{1,2} = \pm\sqrt{35}$.

Ответ. Точка покоя – центр (рис. 2.7).

3. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -2y_1 - 3y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_1 + y_2 \end{cases}$

Решение.

$$D(l) = \begin{vmatrix} -2-l & -3 \\ 1 & 1-l \end{vmatrix} = l^2 + l + 1 = 0$$

Корни – комплексные, $\operatorname{Re} l_i = -0,5 < 0$.

Ответ. Точка покоя – устойчивый фокус (рис. 2.6).

4. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 3y_1 + 2y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_1 + y_2 \end{cases}$

Решение.

$$D(l) = \begin{vmatrix} 3-l & 2 \\ 1 & 1-l \end{vmatrix} = l^2 - 4l + 1 = 0$$

Корни $D(l)$: $l_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3} > 0$ – корни вещественные положительные.

Ответ. Точка покоя – неустойчивый узел (рис. 2.3).

2.4. Исследование на устойчивость по первому приближению.

Пусть исследуется на устойчивость точка покоя $(0,0)$ системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(x,y) \end{cases} \tag{4.1}$$

(т.е. предполагается $f_1(0,0) = f_2(0,0) = 0$).

Пусть $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ – дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $(0,0)$. Для системы (4.1) составим уравнения первого приближения в окрестности начала координат.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \qquad (4.2),$$

где $a_{11}x + a_{12}y = df_1(x,y)$, $a_{21}x + a_{22}y = df_2(x,y)$. (Здесь учтено, что $dx = x - 0 = x$, $dy = y - 0 = y$).

Исследование на устойчивость точки покоя (4.2) вместо исследования на устойчивость точки покоя (4.1) называется исследованием на устойчивость по первому приближению.

Справедливы следующие теоремы:

I. Если все корни характеристического уравнения системы (4.2) $D(l)=0$ имеют отрицательную вещественную часть $(\operatorname{Re} l_i<0)$, то точка покоя $(0,0)$ системы (4.1) асимптотически устойчива.

II. Если хотя бы один корень характеристического уравнения $D(l)=0$ системы (4.2) имеет вещественную положительную часть, то точка покоя системы (4.1) неустойчива.

Замечание. Если среди корней характеристического уравнения (4.2) есть корни с отрицательной вещественной частью и нулевые или чисто мнимые, то исследование на устойчивость системы (4.2) не дает ответа на вопрос об устойчивости точки покоя $(0,0)$ системы (4.1).

Указанные выше теоремы I и II дают возможность решать задачу об устойчивости точки покоя системы (4.1) на основе исследования более простой системы (4.2).

Решение примеров. Исследовать на устойчивость точку покоя $(0,0)$.

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-x+2y-3x^2 \\ \dfrac{dy}{dt}=3x-2y+2x^2-y^4 \end{cases}$ $\qquad$ $\dfrac{dy_1}{dt}=-y_1+2y_2-3y_1^2$, $\quad \dfrac{dy_2}{dt}=3y_1-2y_2+2y_1^2-y_2^4$

Теоремы I и II применимы.

Здесь $f_1(x,y)=-x+2y-3x^2$, ее дифференциал в точке $(0,0)$ равен $-x+2y$, $f_2(x,y)=3x-2y+2x^2-y^4$, ее дифференциал $3x-2y$.

Уравнения первого приближения:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-x+2y \\ \dfrac{dy}{dt}=3x-2y \end{cases}$$

$$D(l)=\begin{vmatrix} -1-l & 2 \\ 3 & -2-l \end{vmatrix}=l^2+3l-4=0,\quad l_1=-4,\quad l_2=1$$

Один корень положительный, следовательно, точка покоя неустойчива.

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-\sin x+3y+x^5 \\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{4}x-2y-\dfrac{1}{6}y^3 \end{cases}$

Теоремы I и II применимы, т.к. $f_1(x,y)$ è $f_2(x,y)$ дважды (и более) непрерывно дифференцируемы.

$df_1 = d\left(-\sin x + 3y + x^5\right) = -x + 3y,$ â ò. $(0,0)$

$df_2 = d\left(\frac{1}{4}x - 2y - \frac{1}{6}y^3\right) = \frac{1}{4}x - 2y,$ â ò. $(0,0)$.

Уравнения первого приближения

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{4}x - 2y \end{cases}$$

$$D(l) = \begin{vmatrix} -1-l & 3 \\ \dfrac{1}{4} & -2-l \end{vmatrix} = l^2 + 3l + \frac{5}{4} = 0,$$

$$l_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{5}{4}}, \quad l_1 = -\frac{1}{2}, \quad l_2 = -\frac{5}{2}.$$

Все корни отрицательные. Точка покоя асимптотически устойчива.

Функции Ляпунова и теорема Ляпунова об устойчивости.

Будем рассматривать систему (4.1) из предыдущего параграфа в окрестности точки покоя $(0,0)$. Сформулируем теорему Ляпунова об устойчивости.

Если существует непрерывно дифференцируемая функция $V(x,y)$ такая, что

1) $V(x,y) > 0$ в окрестности начала координат, за исключение точки $(0,0)$, где $V(0,0) = 0$;

2) $\frac{dV}{dx} \cdot f_1(x,y) + \frac{dV}{dy} \cdot f_2(x,y) = W(x,y) < 0$, то точка покоя системы (4.1) устойчива.

Если $W(x,y)$ обращается в нуль лишь при $x = y = 0$, то точка покоя асимптотически устойчива.

Функция $V(x,y)$ при этом называется функцией Ляпунова, а $W(x,y)$ называется производной от функции Ляпунова по времени, вычисленной в силу системы (4.1) и обозначается $\frac{dV}{dt}$:

$$\left(W(x,y) = \frac{dV}{dt}\right).$$

Теорема Ляпунова дает метод установления устойчивости точки покоя системы путем подбора соответствующей функции $V(x,y)$.

Решение примеров.

Установить устойчивость точки покоя $(0,0)$.

8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + xy^4 - x^3y^6 \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{2}x^2y - \dfrac{1}{4}y^3 \end{cases}$

Рассмотрим функцию $V(x,y) = \dfrac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$,

$$\frac{dV}{dt} = x\left(-3x + xy^4 - x^3y^6\right) + y\left(-\frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{4}y^3\right) =$$

$$= -3x^2 - x^4y^6 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2}x^2y^2\left(1 - y^2\right) = W(x,y)$$

$W(x,y) < 0$ в окрестности начала $(0,0)$ за исключением самого начала. Поэтому все условия теоремы Ляпунова выполнены. Точка покоя системы асимптотически устойчива. Заметим, что установить устойчивость по первому приближению в данном случае невозможно, так как один из корней характеристического уравнения равен нулю.

9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 3x^3 \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 7y^3 \end{cases}$

Рассмотрим $V(x,y) = \dfrac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$,

$$W(x,y) = \frac{dV}{dt} = x\left(y - 3x^3\right) + y\left(-x - 7y^3\right) = -3x^4 - 7y^4.$$

Как и в предыдущем случае устанавливаем, что в силу теоремы Ляпунова точка покоя устойчива асимптотически:

$V(x,y) > 0,\ \ W(x,y) < 0$ всюду, за исключением начала координат.

Уравнения первого приближения

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

Имеют характеристическое уравнение вида

$$D(l) = \begin{vmatrix} -l & 1 \\ -1 & -l \end{vmatrix} = l^2 + 1 = 0. \qquad l_{1,2} = \pm i$$

Все корни чисто мнимые, поэтому теоремы об устойчивости по первому приближению не дают ответа на вопрос об устойчивости.

III. Расчетное задание «Дифференциальные уравнения».

Задача №1.

Найти решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений.

1. $\begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = 2x - y \end{cases}$ $\quad x(0) = 4, \quad y(0) = -2$

2. $\begin{cases} x' = y - 7x \\ y' = -2x - 5y \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2$

3. $\begin{cases} x' = 3x + 4y \\ y' = -2x - y \end{cases}$ $\quad x(0) = 3, \quad y(0) = 1$

4. $\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 3x + y \end{cases}$ $\quad x(0) = 2, \quad y(0) = 3$

5. $\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = -x + 5y \end{cases}$ $\quad x(0) = 3, \quad y(0) = 1$

6. $\begin{cases} x' = 7x - 4y \\ y' = x + 2y \end{cases}$ $\quad x(0) = 6, \quad y(0) = 3$

7. $\begin{cases} x' = 6x + 2y \\ y' = -x + 4y \end{cases}$ $\quad x(0) = -4, \quad y(0) = 0$

8. $\begin{cases} x' = 8x - 5y \\ y' = x + 6y \end{cases}$ $\quad x(0) = 10, \quad y(0) = -10$

9. $\begin{cases} x' = 2x + 2y \\ y' = -2x + 3y \end{cases}$ $\quad x(0) = -2, \quad y(0) = 3$

10. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 4x + 5y \end{cases}$ $\quad x(0) = 7, \quad y(0) = 2$

11. $\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = 5x + 6y \end{cases}$ $\quad x(0) = 4, \quad y(0) = 8$

12. $\begin{cases} x' = 9x + 2y \\ y' = -5x + 7y \end{cases}$ $\quad x(0) = 8, \quad y(0) = 2$

13. $\begin{cases} x' = 3x + 8y \\ y' = 2x + 9y \end{cases}$ $\quad x(0) = 0, \quad y(0) = 5$

14. $\begin{cases} x' = 6x - 2y \\ y' = 2x + 11y \end{cases}$ $\quad x(0) = 2, \quad y(0) = 2$

15. $\begin{cases} x' = 8x - 5y \\ y' = -2x + 10y \end{cases}$ $\quad x(0) = 10, \quad y(0) = 22$

16. $\begin{cases} x' = 4x - 10y \\ y' = x + 2y \end{cases}$ $\quad x(0) = -20, \quad y(0) = -20$

17. $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 4x + 7y \end{cases}$ $\quad x(0) = 9, \quad y(0) = 3$

18. $\begin{cases} x' = 2x - 5y \\ y' = x + 8y \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, \quad y(0) = 3$

19. $\begin{cases} x' = 10x + y \\ y' = 16x + 4y \end{cases}$ $\quad x(0) = 4, \quad y(0) = -2$

20. $\begin{cases} x' = 8x + 2y \\ y' = -3x + y \end{cases}$ $\quad x(0) = 3, \quad y(0) = 1$

21. $\begin{cases} x' = 7x - y \\ y' = 10x + 5y \end{cases}$ $\quad x(0) = 8, \quad y(0) = -4$

22. $\begin{cases} x' = 6x - 5y \\ y' = x + 2y \end{cases}$ $\quad x(0) = -10, \quad y(0) = 0$

23. $\begin{cases} x' = 5x - 2y \\ y' = 4x + y \end{cases}$ $\quad x(0) = 2, \quad y(0) = -4$

24. $\begin{cases} x' = 5x + y \\ y' = -8x + 9y \end{cases}$ $\quad x(0) = 8, \quad y(0) = 8$

25. $\begin{cases} x' = 7x + 6y \\ y' = -x + 14y \end{cases}$ $\quad x(0) = 10, \quad y(0) = 5$

26. $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -2x + y \end{cases}$ $\quad x(0) = 2, \quad y(0) = 2$

Задача №2.

Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы

1. $\begin{cases} \dot{x} = -\sin x + y \\ \dot{y} = -x + x^3 - \ln(1+y)^2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = -(x + y^2) + 2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{2} \\ \dot{y} = \sin x - (\cos y - 1) \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x + y\cos^2 x \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = -\sin y - x\sin^2 y \\ \dot{y} = x + y^3 + ye^x \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = 1 - e^{-y} + x^3 \\ \dot{y} = -\sin(x + xy) - 2y \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = 1 - \cos x + y \\ \dot{y} = \ln(1-x) + \operatorname{tg} y \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = 2 - e^x - 3y - \cos y \\ \dot{y} = x + 2\sin y + y^2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = -\ln(1+2y) + (x-3)^2 - 9 \\ \dot{y} = 5x + 6(x-y)^2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = e^y - \cos x \\ \dot{y} = -2y - \sin(x+y) \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(x-y) + y^2 \\ \dot{y} = (3-x-y)^2 - 9\cos x \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = \sin y - \operatorname{tg} x \\ \dot{y} = 2 - e^x - e^{2y} \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{1-2x} - 1 - 2\ln(1+y) \\ \dot{y} = \operatorname{arctg} x - y^2 \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} = -\sin y + x\operatorname{tg} y \\ \dot{y} = \operatorname{arctg} x - 4e^y + 4\cos y \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x} = y + x^3 \\ \dot{y} = -\operatorname{tg}(x + xy) - 2\sin y \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot{x} = 1 - \sqrt{1-x^2} + y \\ \dot{y} = e^{-x} + \sin y - \cos y \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x} = 3 - e^x\cos y - e^{3y} \\ \dot{y} = x + \ln(1+y)^2 + y^2 \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dot{x} = y\left(\dfrac{1}{2} - e^y\right) + 3(x-1)^2 - 3 \\ \dot{y} = \operatorname{arctg} 5x + (x+y)^3 e^x \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dot{x} = (x^2+1)^2 - e^{-y} \\ \dot{y} = \ln(1-y)^2 - \operatorname{arctg}(x-y) \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(1+y-x) + y^2 \\ \dot{y} = -\sin x + \cos x - \sqrt{1-4y} \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dot{x} = e^{x-y} - \cos y \\ \dot{y} = (1-x)^6 - e^{6y} \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dot{x} = (1+y)^2 - \operatorname{tg}(x + x^2) - \cos x^2 \\ \dot{y} = e^{x+y^2} - \cos y \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dot{x} = y + \cos(x+y) - 1 \\ \dot{y} = \dfrac{1}{2}(1-x-y)^2 + \operatorname{arctg} y \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dot{x} = -y\cos x - x\cos y \\ \dot{y} = \ln(1+x)^3 + \sqrt{1+y^2}\,e^y \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dot{x} = \cos y + \sin y - e^{x^3} \\ \dot{y} = \operatorname{arctg}(y^2 - x) - \sin 2y \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot{x} = e^{y} - \cos(xy) \\ \dot{y} = -\operatorname{tg} x - y\sqrt{1 - x^{2}} \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dot{x} = \cos y - \cos x + \sin y \\ \dot{y} = \sqrt{1 - 2x} - e^{-y} + x^{3} \end{cases}$

Оглавление.