Министерство образования Российской Федерации

"МАТИ"- РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО

Кафедра "Высшая математика"

А. С. Кочуров

ВВЕДЕНИЕ В ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

(краткий конспект)

Москва 2003 г.

ЛЕКЦИЯ 2.1. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Табличные интегралы. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.

Если основной задачей дифференциального исчисления является вычисление производной f' некоторой функции f, то основной задачей интегрального исчисления является обратная задача: по заданной производной F' найти исходную функцию F. Эту обратную задачу называют еще задачей нахождения первообразной для функции F'.

Определение. Первообразной для $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ называется любая дифференцируемая функция $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая в каждой точке $t \in \langle a, b\rangle$ равенству

$$F'(t) = f(t).$$

Пример. Первообразной функцией для $3t^2$ будет функция t^3. Функция t^3+1 также будет первообразной для $3t^2$. Таким образом, в отличие от производной функции у одной функции может быть несколько первообразных. Структура множества первообразных проясняется следующей теоремой

Теорема. $/f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, F_1, F_2 – две первообразные для $f/ \Rightarrow (F_1(t) - F_2(t))$ постоянна на $\langle a, b\rangle$.

$\lhd$: По условию $(F_1(t) - F_2(t))' = f(t) - f(t) = 0$ при любом $t \in \langle a, b\rangle$. Утверждение теоремы вытекает, таким образом, из следствия к теореме Лагранжа о том, что если производная некоторой функции равна нулю на некотором промежутке, то она на этом промежутке постоянна. $\rhd$

Следствие. Если F – какая-либо первообразная для $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, то добавляя к F всевозможные постоянные C, мы получим все первообразные для f.

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ называется неопределенным интегралом f и обозначается символом $\int f(t)\, dt$. Функцию f при этом называют подынтегральной. Пусть F – некоторая первообразная функция для f. Часто употребляют такую форму записи неопределенного интеграла

$$\int f(t)\, dt = F(t) + C, \tag{1}$$

понимая под этим и справа и слева от знака равенства одно и тоже множество функций, отличающихся от F на константу. Смысл использованного обозначения и (1) состоит в следующем: согласно определению для любой $F \in \int f(t)\, dt$ выполнено равенство $F'(t) = f(t)$ и, значит, $dF(t) = F'(t)\, dt = f(t)\, dt$. Поэтому пишут

$$d \int f(t)\, dt = f(t)\, dt, \tag{2}$$

понимая под этим то, что дифференциал любой функции из $\int f(t)\, dt$ на элементе dt равен $f(t)\, dt$. Кроме этого (1) можно записать в виде

$$\int dF(t) = F(t) + C. \tag{3}$$

Таким образом, в определенном смысле, операции $\int$ и d являются взаимно обратными.

Одно из основных свойств неопределенного интеграла является следствием этой взаимной обратимости. Это свойство – линейность неопределенного интеграла: пусть функции f и g обладают первообразными. Тогда

1) $\int af(t)\, dt = a \int f(t)\, dt$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,

2) $\int (f(t) + g(t))\, dt = \int f(t)\, dt + \int g(t)\, dt$.

Для доказательства достаточно заметить, что если F и G – первообразные для f и g, то $F + G$ – первообразная для $f + g$, aF – первообразная для af.

Следующие примеры выражения неопределенных интегралов от известных функций в терминах элементарных функций носят название табличных интегралов. Их необходимо знать наизусть.

1). $(t^{m+1}/(m+1))' = t^m$, $\Rightarrow \quad \int t^m\, dt = t^{m+1}/(m+1) + C$, $m \in \mathbb{R}$, $m \neq -1$,

2). $(\ln|t|)' = \frac{1}{t}$, $\Rightarrow \quad \int \frac{1}{t}\, dt = \ln|t| + C$,

3). $(e^t)' = e^t$, $\Rightarrow \quad \int e^t\, dt = e^t + C$,

4). $(\frac{a^t}{\ln a})' = a^t$, $\Rightarrow \quad \int a^t\, dt = \frac{a^t}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$,

5). $(\sin t)' = \cos t$, $\Rightarrow \quad \int \cos t\, dt = \sin t + C$,

6). $(-\cos t)' = \sin t$, $\Rightarrow \quad \int \sin t\, dt = -\cos t + C$,

7). $(\operatorname{tg} t)' = \frac{1}{(\cos t)^2}$, $\Rightarrow \quad \int \frac{1}{(\cos t)^2}\, dt = \operatorname{tg} t + C$,

8). $(-\operatorname{ctg} t)' = \frac{1}{(\sin t)^2}$, $\Rightarrow \quad \int \frac{1}{(\sin t)^2} dt = -\operatorname{ctg} t + C$,

9). $(\arcsin t)' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, $\Rightarrow \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \arcsin t + C$,

10). $(\operatorname{arctg} t)' = \frac{1}{1+t^2}$, $\Rightarrow \quad \int \frac{1}{1+t^2} dt = \operatorname{arctg} t + C$,

11). $\int \frac{1}{1-t^2} dt = 1/2 \ln|\frac{1+t}{1-t}| + C$ (высокий логарифм),

12). $\int \frac{1}{\sqrt{a+t^2}} dt = \ln|t + \sqrt{a+t^2}| + C$ (длинный логарифм).

Еще одним важным свойством неопределенного интеграла, являющимся следствием взаимной обратимости операций интегрирования и дифференцирования, является так называемая независимость вида неопределенного интеграла от выбора аргумента или формула замены переменной. По существу это свойство является отражением свойства инвариантности вида 1-го дифференциала от выбора аргумента. Вспомним как выглядит эта инвариантность: пусть $F \in D\langle a, b\rangle$, $\phi : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$ – дифференцируемая функция. Образуем сложную функцию $G : \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}$, $G(x) = F(\phi(x))$. Тогда

$$dG(x) = F'(\phi(x))\phi'(x)\,dx = F'(\phi(x))\,d\phi(x) = F'(t)\,dt,$$

где $t = \phi(x)$. Поэтому $G(x)$ – первообразная для функции $F'(\phi(x))\phi'(x)$ и выполняются равенства

$$\int G'(x)\,dx = \int F'(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int F'(t)|_{t=\phi(x)}(dt)|_{t=\phi(x)} = F(t)|_{t=\phi(x)} + C.$$

Эта формула и называется формулой замены переменной. Рассмотрим пример ее использования:

$$\int \sin x \cos x\,dx = \int \sin x\,d\sin x = \int t\,dt = t^2/2|_{t=\sin x} + C = 1/2\sin^2 x + C.$$

Другие примеры, с ней связанные, могут быть основаны на равенствах

1). $dx = d(x+b) = dt$, b – константа, $t = x + b$,

2). $dx = \frac{1}{a}d(ax) = dt$, $a \neq 0$ – константа, $t = ax$,

3). $dx = \frac{1}{a}d(ax+b) = dt$, $a \neq 0$, $t = ax + b$,

4). $x\,dx = 1/2\,d(x^2) = dt$, $t = x^2$,

5). $\sin x\,dx = -d(\cos x) = dt$, $t = \cos x$,

6). $\cos x\,dx = d(\sin x) = dt$, $t = \sin x$.

К основным приемам нахождения неопределенных интегралов относятся, таким образом,

1. Метод разложения. Если $f = f_1 + f_2$, f_1, f_2 имеют первообразные на промежутке $\langle a, b\rangle$, то

$$\int f\,dt = \int f_1\,dt + \int f_2\,dt.$$

2. Метод подстановки (замены переменной). Пусть f имеет первообразную на промежутке $\langle a, b\rangle$, $\phi : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$ – дифференцируемая функция. Тогда

$$\int f(t)\,dt = \int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx,$$

$$\int t\sqrt{t-5}\,dt = \int (x^2+5)x(2x)\,dx = (2x^5/5 + 10x^3/3 + C)|_{t=x^2+5} = \frac{2(t-5)^{5/2}}{5} + \frac{10(t-5)^{3/2}}{3} + C.$$

3. Метод интегрирования по частям. Пусть f, g – непрерывно дифференцируемые на $\langle a, b\rangle$ функции. По правилу дифференцирования произведения функций $d(f \cdot g) = g\,df + f\,dg$. Поэтому

$$\int f\,dg = \int d(f \cdot g) - \int g\,df = f \cdot g - \int g\,df.$$

Эта формула носит название формулы интегрирования по частям. Пример ее использования:

$$\int \ln t\,dt = t\ln t - \int t \cdot \frac{1}{t}\,dt = t\ln t - t + C.$$

ЛЕКЦИЯ 2.2. *Комплексные числа, их изображение на плоскости. Алгебраические операции над комплексными числами. Комплексное сопряжение. Модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Корни из комплексных чисел. Показательная функция комплексного аргумента. Формула Эйлера. Показательная форма комплексного числа.*

Под комплексным числом понимается выражение вида $z = x + i \cdot y = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, i – мнимая единица, т. е. $i^2 = -1$. Числа $x + i0 = x$ отождествляются с действительными числами, числа $0 + iy = iy$ называются чисто мнимыми. Действительные числа x и y называются действительной и мнимой частями числа z и обозначаются соответственно $x = \mathrm{Re}\,z$, $y = \mathrm{Im}\,z$. Условимся обозначать совокупность комплексных чисел символом $\mathbb{C}$. Для изображения комплексных часто используется двумерная плоскость. При этом числу $z = x + iy$ однозначно соответствует вектор с координатами (x, y) на плоскости, действительным числам отвечают точки на оси Ox, мнимым числам – точки оси Oy.

Подобно векторам на плоскости комплексные числа можно сравнивать между собой, их можно складывать и вычитать, а также умножать на действительные числа. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $a \in \mathbb{R}$. Тогда
1. $z_1 = z_2, \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$ или $\mathrm{Re}\, z_1$=$\mathrm{Re}\, z_2$, $\mathrm{Im}\, z_1$=$\mathrm{Im}\, z_2$,
2. $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$ или $\mathrm{Re}\,(z_1 \pm z_2)$=$\mathrm{Re}\, z_1 \pm \mathrm{Re}\, z_2$, $\mathrm{Im}\,(z_1 \pm z_2)$=$\mathrm{Im}\, z_1 \pm \mathrm{Im}\, z_2$,
3. $az_1 = (ax_1) + i(ay_1)$ или $\mathrm{Re}\,(az_1)$=$a\mathrm{Re}\, z_1$, $\mathrm{Im}\,(az_1)$=$a\mathrm{Im}\, z_1$.

Эти операции полностью идентичны соответствующим операциям над векторами в плоскости. Операция вычисления длины вектора на плоскости также имеет свой аналог для комплексных чисел. А именно, модулем числа $z = x + iy \in \mathbb{C}$ называют число

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 0.$$

Специальное название имеет число $\bar{z} = x - iy$. Оно называется сопряженным к $z = x + iy$. Из определения следует, что $\mathrm{Re}\,\bar{z}$=$\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\,\bar{z}$=–$\mathrm{Im}\, z$, $|\bar{z}| = |z|$.

Однако все перечисленные определения, правила и свойства не являются чем-то исключительным и отделяющим комплексные числа от векторов на плоскости. Их отличие состоит в том, что для комплексных чисел определяют операцию умножения двух чисел между собой так, что в результате получается опять же комплексное число. При этом самым главным в этом определении является то, что получающееся правило умножения вместе с операцией сложения удовлетворяют хорошо известным правилам сложения и умножения действительных чисел: все аксиомы сложения и умножения, которые справедливы для действительных чисел, справедливы и для комплексных. Для векторов на плоскости такой операции нет (так скалярное произведение векторов обладает весьма неприятным свойством: можно перемножить два ненулевых вектора и получить ноль). Правило умножения комплексных чисел таково:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Отсюда, в частности, получается равенство $i^2 = (0 + i1)(0 + i1) = (0 - 1) + i(0 + 0) = -1$. Следующие утверждения легко проверяются:
4. $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$,
5. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_1y_2-x_2y_1)}{x_2^2+y_2^2}$, если $z_2 \neq 0$,
6. если $z_1 = \bar{z}_2$, то $z_2 = \bar{z}_1$ и наоборот,
7. $\overline{(z_1 \pm z_2)} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$, $\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$,
8. $\overline{(z_1 : z_2)} = \bar{z}_1 : \bar{z}_2$, если $z_2 \neq 0$,
9. $\mathrm{Re}\, z = (z + \bar{z})/2$, $\mathrm{Im}\, z = (z - \bar{z})/(2i)$.

Помимо модуля $|z|$ с каждым комплексным числом $z = x + iy \neq 0$ связано понятие аргумента: $\arg z$ – угол в промежутке $(-\pi, \pi]$, который образует вектор (x, y) с единичным вектором $(1, 0)$ оси Ox. С этими определениями тесно связана так называемая тригонометрическая форма записи комплексного числа z

$$z = x + iy = r(\cos\phi + i\sin\phi), \quad r = |z|,\ \phi = \arg z.$$

Для аргумента ϕ имеем равенства $\cos\phi = x/r$, $\sin\phi = y/r$. Понятно, что если нам задана алгебраическая форма записи комплексного числа $z = x + iy$, то величины $r = |z|$ и $\phi = \arg z$ подсчитываются однозначно. Верно и обратное, если заданы величины $r = |z|$ и $\phi = \arg z$ (т. е. тригонометрическая форма записи комплексного числа $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$), то однозначно вычисляются $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$. Указанная взаимная однозначность порождает две эквивалентные формы записи комплексных чисел: алгебраическую и тригонометрическую. Эти формы записи имеют свои аналоги для векторов на плоскости: для алгебраической формы записи комплексного числа $z = x + iy$ – это запись точки на плоскости в декартовых координатах (x, y), для тригонометрической формы записи $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ – это запись точки на плоскости в полярных координатах r и ϕ. В последнем случае, чтобы отметить точку на плоскости, проводят луч с центром в начале координат под углом ϕ по отношению к положительному направлению оси Ox и на нем указывают на точку, отстоящую на r единиц от начала координат. Связь между декартовыми и полярными координатами задается уже выписанными выше соотношениями:

$$x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad r \in \mathbb{R}_+,\ \phi \in (-\pi, \pi].$$

(иногда область изменения координаты ϕ смещают в промежуток $[0, 2\pi)$).

Отступление. Рассмотренная выше полярная система координат может быть введена в векторном пространстве любой размерности $n \in \mathbf{N}$. Так в пространстве $\mathbb{R}^3$ переход от декартовой к полярной системе координат выглядит следующим образом:

$$x = r\cos\phi\cos\psi, \quad y = r\sin\phi\cos\psi, \quad z = r\sin\psi,$$

$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\quad r \in \mathbb{R}_+$, $\phi \in (0, 2\pi]$, $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Учитывая область изменения параметров обратный переход осуществляется при помощи соотношений:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 0, \quad r\sin\psi = z, \quad r\sin\phi\cos\psi = y.$$

Отметим несколько простых утверждений о комплексных числах:
Теорема 1. $/z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}/ \Rightarrow$ 1. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ 2. $\phi = \arg(z_1 \cdot z_2) \equiv (\arg z_1 + \arg z_2)(\mathrm{mod}(2\pi))$.
(запись $a \equiv b\,(\mathrm{mod(c)})$ означает, что $(a-b)/c$ – целое)
$\lhd$: Действительно, пусть $z_1 = r_1((\cos\phi_1 + i\sin\phi_1))$, $z_2 = r_2((\cos\phi_2 + i\sin\phi_2))$ – тригонометрические формы записи чисел z_1 и z_2. Тогда $z_1 z_2 =$

$$= |z_1 z_2|\,(\cos\phi + i\sin\phi) = r_1 r_2\big((\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2) + i(\sin\phi_1\cos\phi_2 + \cos\phi_1\sin\phi_2)\big) =$$

$$= r_1 r_2((\cos(\phi_1+\phi_2) + i(\sin\phi_1+\phi_2))$$

– тригонометрическая форма записи $z_1 z_2$. Полученное равенство доказывает теорему. $\rhd$
Следствие. $/z \in \mathbb{C},\, n \in \mathbf{N}/ \Rightarrow$ 1. $|z^n| = |z|^n$ 2. $\arg(z^n) \equiv (n\arg z)(\mathrm{mod}(2\pi))$.
Пример. Точка $i \cdot z$ получается из точки z поворотом на угол $\pi/2$.
Теорема 2. $/z_1,\, z_2 \in \mathbb{C},\, z_2 \neq 0/$
$\Rightarrow$ 1. $|z_1 : z_2| = |z_1| : |z_2|$ 2. $\phi = \arg(z_1 : z_2) \equiv (\arg z_1 - \arg z_2)(\mathrm{mod}(2\pi))$.
$\lhd$: Действительно, пусть $z_1 = r_1((\cos\phi_1 + i\sin\phi_1))$, $z_2 = r_2((\cos\phi_2 + i\sin\phi_2))$ – тригонометрические формы записи чисел z_1 и z_2. Тогда $z_1 : z_2 = |z_1 : z_2|\,(\cos\phi + i\sin\phi) =$

$$= r_1 : r_2\big((\cos\phi_1\cos(-\phi_2) - \sin\phi_1\sin(-\phi_2)) + i(\sin\phi_1\cos(-\phi_2) + \cos\phi_1\sin(-\phi_2))\big) =$$

$$= r_1 : r_2((\cos(\phi_1-\phi_2) + i(\sin\phi_1-\phi_2))$$

– тригонометрическая форма записи $z_1 : z_2$. Полученное равенство доказывает теорему. $\rhd$

Пусть $n \in \mathbf{N}$, $z \in \mathbb{C}$. Обозначим

$$\sqrt[n]{z} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi), \quad z = r(\cos\phi + i\sin\phi).$$

Тогда

$$\rho^n = r, \quad n\psi = \phi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\arg z + 2k\pi}{n}), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1}$$

По этой формуле извлекаются корни степени n из комплексных чисел. Согласно (1) имеется ровно n различных корней из числа z.

Определим показательную функцию аргумента $z = x + iy \in \mathbb{C}$ по правилу

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y). \tag{2}$$

Так заданная показательная функция комплексного аргумента сохраняет свое главное свойство

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Получившаяся функция периодична с мнимым основным периодом $2\pi i$. Формула (2) при $x = 0$ носит специальное название – формула Эйлера:

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y. \tag{3}$$

Она замечательна еще и тем, что может быть получена из сравнения рядов Тейлора левой и правой частей (3). В терминах показательной функции комплексного переменного используют также так называемое представление комплексных чисел в показательной форме

$$z = |z|e^{i\arg z} = |z|e^{i\arg z + 2\pi k},\ k \in \mathbb{Z} \tag{4}$$

Формула (3) используется и для распространения области определения тригонометрических функций на комплексные числа, а формула (4) – для определения произвольной степени комплексного числа.

ЛЕКЦИЯ 2.3. *Многочлены. Теорема Безу. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена на линейные множители в поле комплексных чисел. Простые и кратные корни многочлена. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на линейные и квадратичные множители. Рациональные функции. Деление многочленов, выделение целой части рациональной функции. Правильные рациональные функции, их разложение на простейшие.*

Многочлены (алгебраические) переменной $x \in \mathbb{R}$ относят к числу простейших функций одной действительной переменной. Общий вид такой функции следующий:

$$p(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m, \tag{1}$$

где $m \in \mathbf{N}$, коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ – постоянные числа, $a_0 \neq 0$ (многочлен степени m). Ее областью определения является вся числовая ось, областью значений – действительные числа. Однако после того как мы рассмотрели понятие комплексного числа, становится естественным распространить область определения функции (1) на множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел. При этом областью значений (1) становится множество $\mathbb{C}$, а сами многочлены иногда называют функциями комплексной переменной z. Следующий шаг, который необходимо сделать при определении многочлена, – расширить область задания коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_m$ с $\mathbb{R}$ на множество $\mathbb{C}$. При таком расширении иногда стараются обозначать какие собственно многочлены рассматриваются в той или иной задаче, привлекая для этого обозначения:

многочлен действительного переменного с действительными коэффициентами,

многочлен комплексного переменного с действительными коэффициентами,

многочлен комплексного переменного с комплексными коэффициентами и т. п.

Основная задача, с которой приходится иметь дело при работе с алгебраическими многочленами, – это задача поиска корней этого многочлена. Корнем алгебраического многочлена $p(z)$ вида (1) называют число $z_0 \in \mathbb{C}$, для которого $p(z_0) = 0$. Если удается найти такое z_0, то исходный многочлен (1) может быть записан в виде

$$p(z) = q(z) \cdot (z - z_0), \tag{2}$$

где $q(z) = b_0 z^{m-1} + b_1 z^{m-2} + \cdots + b_{m-1}$ – многочлен степени $(m-1)$ с комплексными, вообще говоря, коэффициентами. Возможность такой записи обеспечивается хорошо известным алгоритмом деления многочлена $p(z)$ на линейный многочлен $(z - z_0)$ "в столбик". С этим алгоритмом тесно связана теорема "об остатке" деления многочлена $p(z)$ на произвольный линейный многочлен $(z - z_1)$:

Теорема 1. (Безу) Остаток от деления многочлена $p(z)$ степени m из (1) на $(z - z_1)$ равен $p(z_1)$. Это в точности означает, что

$$\frac{p(z)}{z - z_1} = r(z) + \frac{p(z_1)}{z - z_1},$$

где $r(z)$ – некоторый многочлен степени $(m-1)$.

$\lhd$: Рассмотрим разность

$$p(z) - p(z_1) = a_0(z^m - z_1^m) + a_1(z^{m-1} - z_1^{m-1}) + \cdots + a_{m-1}(z - z_1). \tag{3}$$

Из этого представления видно, что отношение $(p(z) - p(z_1))/(z - z_1)$ записывается как сумма дробей $(z^k - z_1^k)/(z - z_1)$ с коэффициентами a_k, $k = 0, \ldots, m-1$. Из формулы для суммы первых членов геометрической прогрессии (или проверив непосредственно) легко получить равенство

$$\frac{z^k - z_1^k}{z - z_1} = z_1^{k-1} + z_1^{k-2} z + z_1^{k-3} z^2 + \cdots + z_1^2 z^{k-3} + z_1 z^{k-2} + z^{k-1}, \quad k > 1, \quad k \in \mathbf{N}. \tag{4}$$

После подстановок (4) в $(p(z) - p(z_1))/(z - z_1)$ получим, что

$$r(z) = \frac{p(z) - p(z_1)}{z - z_1}$$

– многочлен степени $(m-1)$, что доказывает теорему. $\rhd$

Одной из основных для многочленов является

Теорема 2. (основная теорема алгебры) Всякий алгебраический многочлен (1) имеет хотя бы один корень на множестве комплексных чисел. (без доказательства).

Применяя попеременно этот результат и разложение (2) получим

Следствие. Всякий алгебраический многочлен (1) может быть записан в виде

$$p(z) = a_0 (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \cdots \cdot (z - z_m), \tag{5}$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_m \in \mathbb{C}$ – m корней многочлена $p(z)$, среди которых могут быть и совпадающие. Такое разложение называется разложением на линейные множители многочлена $p(z)$ в пространстве комплексных чисел.

Преобразуем (5), группируя одинаковые сомножители, если такие найдутся:

$$p(z) = a_0 (z - z_1)^{m_1} \cdot (z - z_2)^{m_2} \cdot \ldots$$

В этом представлении корень с индексом j называется простым, если $m_j = 1$ и называется кратным, если $m_j > 1$. Иногда такой корень называют еще корнем кратности m_j.

Сделаем важное замечание о разложении на множители многочлена (1) с действительными коэффициентами. Если все корни (1) оказались действительными, то (5) – разложение (1) на линейные множители многочлена $p(z)$ в пространстве действительных чисел. Предположим среди корней (1) имеются комплексные и z_1 – один из них. Тогда

$$p(z_1) = 0.$$

Так как $p(z)$ – многочлен с действительными коэффициентами, то по правилам действий с комплексными числами

$$0 = \bar{0} = \overline{p(z_1)} = \overline{a_0 z_1^m + a_1 z_1^{m-1} + \cdots + a_{m-1} z_1 + a_m} = a_0(\bar{z}_1)^m + a_1(\bar{z}_1)^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\bar{z}_1 + a_m.$$

Поэтому $p(\bar{z}_1) = 0$ и $\bar{z}_1$ – также является корнем многочлена (1). Это означает, что $p(z)$ делится без остатка на квадратный трехчлен

$$s(x) = (x - z_1)(x - \bar{z}_1) = x^2 - (2\mathrm{Re}\, z_1)x + |z_1|^2$$

с действительными коэффициентами $1, -2\mathrm{Re}\, z_1, |z_1|^2$. Применяя алгоритм деления многочлена $p(x)$ из (1) на $s(x)$ "в столбик" получим, что $p(x) = s(x) \cdot r(x)$, где $r(x)$ – многочлен степени $(m-2)$ с действительными коэффициентами. Повторяя эту процедуру последовательно несколько раз мы прийдем к следующему результату

Теорема. Всякий многочлен $p(x)$, $a_0 = 1$, вида (1) с вещественными коэффициентами раскладывается на произведение линейных сомножителей вида $(x - a)$, $a \in \mathbb{R}$, или квадратичных сомножителей вида $(x^2 + ax + b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 - 4b < 0$. При этом среди таких сомножителей могут быть и совпадающие.

Совокупность алгебраических многочленов степени **не выше** m принято обозначать символом $\mathcal{P}_m$. Символом $\mathcal{R}_{m,n}$, $m, n \in \mathbb{Z}_+$, принято обозначать совокупность дробей вида $p(x)/q(x)$, $p(x) \in \mathcal{P}_m$, $q(x) \in \mathcal{P}_n$. Эта рациональная дробь называется правильной, если $m < n$. Она называется действительной, если многочлены $p(x)$, $q(x)$ являются многочленами с действительными коэффициентами. Рациональные дроби вида

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Mx + N}{(x^2 + ux + v)^s},$$

где $k, s \in \mathbf{N}$, $A, M, N \in \mathbb{R}$, $a, u, v \in \mathbb{R}$, $u^2 - 4v < 0$, называются элементарными дробями.

Пусть теперь $p(x)/q(x)$ – произвольная действительная дробь из $\mathcal{R}_{m,n}$, $p(x)$ и $q(x)$ не имеют общих множителей. Если она не является правильной, то, осуществляя деление многочлена $p(x)$ на $q(x)$, приведем ее к виду

$$p(x)/q(x) = r(x) + p_1(x)/q(x),$$

где $r(x)$ – многочлен, $p_1(x)/q(x)$ – правильная рациональная дробь (многочлен $p_1(x)$ при этом называют остатком от деления). Пусть a – действительный корень кратности k многочлена $q(x) = (x-a)^k q_1(x)$. Тогда для некоторого $A \in \mathbb{R}$

$$\frac{p_1(x)}{(x-a)^k q_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{p_2(x)}{(x-a)^{k-1} q_1(x)} \tag{6}$$

и в этом представлении $\frac{p_2(x)}{(x-a)^{k-1} q_1(x)}$ – правильная рациональная дробь. Действительно, каково бы ни было $A \in \mathbb{R}$

$$\frac{p_1(x)}{(x-a)^k q_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{p_1(x) - A q_1(x)}{(x-a)^k q_1(x)}$$

и $\frac{p_1(x) - A q_1(x)}{(x-a)^k q_1(x)}$ – правильная дробь. Выберем $A = p_1(a)/q_1(a)$. Тогда числитель и знаменатель дроби $\frac{p_1(x) - A q_1(x)}{(x-a)^k q_1(x)}$ имеют общий множитель $(x - a)$ (и, быть может, другие), что доказывает (6).

Пусть теперь $q(x) = (x^2 + ux + v)^s q_1(x)$. Тогда

$$\frac{p_1(x)}{(x^2 + ux + v)^s q_1(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + ux + v)^s} + \frac{p_2(x)}{(x^2 + ux + v)^{s-1} q_1(x)} \tag{7}$$

и в этом представлении $\frac{p_2(x)}{(x^2+ux+v)^{s-1} q_1(x)}$ – правильная рациональная дробь. Доказательство (7) проводится по той же схеме, что и доказательство (6). (6) и (7) в совокупности позволяют сформулировать такой результат

Теорема 3. Всякая правильная действительная дробь раскладывается на сумму элементарных дробей.

Приведем пример использования этой теоремы. Пусть

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{2x - 7}{(x+2)^2 (x^2 + x + 1)^3}.$$

Тогда

$$\frac{2x-7}{(x+2)^2(x^2+x+1)^3}=\frac{A_1}{(x+2)^2}+\frac{A_2}{x+2}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+x+1)^3}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+x+1)^2}+\frac{M_3x+N_3}{x^2+x+1}. \qquad (8)$$

Чтобы найти неизвестные A_1, A_2, M_1, N_1, M_2, N_2, M_3, N_3 из $\mathbb{R}$, правую часть этого равенства приводят к общему знаменателю и раскрывают скобки в числителе. После этого выписывают систему линейных уравнений на A_1, A_2, M_1, N_1, M_2, N_2, M_3, N_3, получающуюся приравниванием коэффициентов при одинаковой степени переменной x в числителях левой и правой части (8). Согласно теореме 3 эта система имеет решение. Изложенный метод нахождения представления (8) (и ему подобные) носят название метода неопределенных коэффициентов. Само же разложение дроби на элементарные играет важную роль при нахождении неопределенных интегралов от рациональных функций.

ЛЕКЦИЯ 2.4. *Интегрирование простейших и произвольных правильных дробей. Интегрирование произвольных рациональных функций. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей.*

Напоминание. В прошлый раз была установлена теорема о том, что всякая правильная рациональная дробь может быть представлена как сумма элементарных. Элементарными были названы дроби вида

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Mx+N}{(x^2+ux+v)^s},$$

где $k,s\in\mathbf{N}$, $A,M,N\in\mathbb{R}$, $a,u,v\in\mathbb{R}$, $u^2-4v<0$. Таким образом, нахождение неопределенного интеграла от произвольной рациональной дроби сводится к нахождению интеграла от правильной части дроби (т. е. от многочлена) и от каждой из элементарных дробей по отдельности.

Интегрирование многочленов и элементарной дроби вида $\frac{A}{(x-a)^k}$ не вызывает затруднений. Так, если $k\neq 1$, то

$$\int\frac{A}{(x-a)^k}\,dx=\int\frac{A}{(x-a)^k}\,d(x-a)=-\frac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}}+C,$$

если $k=1$, то

$$\int\frac{A}{x-a}\,dx=A\ln|x-a|+C.$$

Интегрирование элементарной дроби вида $\frac{Mx+N}{(x^2+ux+v)^s}$ проводят в несколько этапов. Сначала, для упрощения, выделяют полный квадрат в знаменателе дроби и делают замену переменной:

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+ux+v)^s}\,dx=\int\frac{M(x+u/2)+(N-Mu/2)}{\big((x+u/2)^2+(v-u^2/4)\big)^s}\,d(x+u/2)=\int\frac{M_1t+N_1}{(t^2+v_1)^s}\,dt,$$

где $t=(x+u/2)$ – новая независимая переменная, $M_1=M$, $N_1=(N-Mu/2)$, $v_1=(v-u^2/4)>0$ – обозначения коэффициентов, сделанные для сокращения выкладок. Полученную дробь разделяют на две и каждую интегрируют отдельно. Интеграл от первой из них легко сводится к табличному:

$$\int\frac{M_1t}{(t^2+v_1)^s}\,dt=\int\frac{(M_1/2)}{(t^2+v_1)^s}\,d(t^2+v_1).$$

Если $s=1$, то интеграл от второй дроби является табличным. Случай $s>1$ сводится к случаю $s=1$ последовательным уменьшением параметра s:

$$I(s)=\int\frac{1}{(t^2+v_1)^s}\,dt=\frac{1}{v_1}\int\frac{v_1+t^2-t^2}{(t^2+v_1)^s}\,dt=\frac{1}{v_1}\big(I(s-1)-\int\frac{t^2}{(t^2+v_1)^s}\,dt\big).$$

Преобразуем последний из полученных интегралов методом интегрирования по частям:

$$\int\frac{t^2}{(t^2+v_1)^s}\,dt=\int\frac{t}{2(t^2+v_1)^s}\,dt^2=\int\frac{-t}{2(s-1)}\,d\frac{1}{(t^2+v_1)^{s-1}}=-\frac{1}{2(s-1)}\Big(\frac{t}{(t^2+v_1)^{s-1}}-I(s-1)\Big).$$

Таким образом вычисление $I(s)$ свелось к вычислению $I(s-1)$. После окончательного выражения интеграла в элементарных функциях необходимо произвести обратную замену переменной: подставить вместо t величину $(x+u/2)$.

Рассмотрим еще четыре вида неопределенных интегралов, относящихся к вычислению интегралов от рациональных функций и простейших иррациональностей. Первый пример:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}=//2x-1=t^4//=\int\frac{2t^3\,dt}{t^2-t}=2\int(t+1+\frac{1}{t-1})dt=$$

$$= (t+1)^2 + 2\ln|t-1| + C = (\sqrt[4]{2x-1}+1)^2 + \ln(\sqrt[4]{2x-1}-1)^2 + C.$$

Рассмотренный интеграл относится к интегралам вида

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1/q_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_2/q_2}, \ldots\right] dx,$$

$R[x,y,z,\ldots]$ – функция, рационально зависящая от каждого из своих аргументов $x, y, z, \ldots$ по отдельности, $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots \in \mathbf{N}$. Для взятия интеграла используют замену переменной

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n,$$

n – наименьшее общее кратное $q_1, q_2, \ldots$ В результате получают интеграл от некоторой рациональной функции переменной t. Интегралы

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx,$$

$p_n \in \mathcal{P}_n$ – заданный многочлен, вычисляют, пользуясь представлением

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx = q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

$q_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$, λ – неизвестные многочлен и число, которые можно найти дифференцированием выписанной формулы. После нахождения коэффициентов q_{n-1} и λ, задача сводится к вычислению табличного по сути интеграла. Интегралы

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad n \in \mathbf{N},$$

приводят к интегралам предыдущего вида, пользуясь подстановкой $\frac{1}{x-\alpha} = t$. Интегралы от дифференциальных биномов

$$\int x^m (a+bx^n)^p\, dx,$$

m, n, p – рациональные числа. Условия, при которых эти интегралы выражаются в элементарных функциях, были получены русским математиком П.Л. Чебышевым и носят его имя:

1. p – целое.
2. $\frac{m+1}{n}$ – целое. Подстановка $a + bx^n = t^s$, s – знаменатель p, сводит интеграл к известным.
3. $\frac{m+1}{n} + p$ – целое. Используется подстановка $ax^{-n} + b = t^s$, s – знаменатель p.
4. Другие соотношения между m, n и p приводят к интегралам, которые нельзя выразить в виде конечной комбинации элементарных функций.

ЛЕКЦИЯ 2.6. *Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл, его свойства. Интегрируемость непрерывных, кусочно-непрерывных функций. Формула Ньютона-Лейбница, ее применение для вычисления определенных интегралов.*

Пусть $f(x) \in C[a,b]$ – непрерывная функция, $a < b$. Интегральной суммой $S_n(f,a,b)$, $n \in \mathbf{N}$, будем называть

$$S_n(f,a,b) = \frac{1}{n} \sum_{\frac{i}{n} \in [a,b],\ i \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

(при этом считаем, что сумма по пустому набору индексов равна нулю). Считаем также, что $S_n(f,b,a) = -S_n(f,a,b)$. Можно показать, что для непрерывной на $[a,b]$ функции f последовательность чисел $S_n(f,a,b)$, $n \in \mathbf{N}$, является сходящейся. Ее предел принимают за значение определенного интеграла f по отрезку $[a,b]$

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} S_n(f,a,b).$$

Пусть теперь c – внутренняя точка интервала (a,b). По определению для любого $n \in \mathbf{N}$ величины $S_n(f,a,b)$ и $S_n(f,a,c) + S_n(f,c,b)$ или совпадают, или отличаются на одно слагаемое вида $\frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$. Поэтому разность $S_n(f,a,b) - S_n(f,a,c) - S_n(f,c,b)$ с ростом n стремится к нулю. Это означает, что

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt \tag{1}$$

(свойство аддитивности по отрезку интегрирования). Из определения следует также, что

$$\int_a^b \alpha f(t)\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt, \quad \int_a^b (f(t)+g(t))\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ g \in C[a,b] \tag{2}$$

(свойство линейности интеграла). Кроме того, если $f(t) \leqslant g(t)$ при всех $t \in [a,b]$, то $S_n(f,a,b) \leqslant S_n(g,a,b)$ и, значит,

$$\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt \tag{3}$$

(свойство монотонности интеграла). Непосредственным следствием (3) является

$$|\int_a^b f(t)\,dt| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt. \tag{3'}$$

По функции f построим новую функцию

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in (a,b], \quad F(a) = 0.$$

Пусть $x_0 \in [a,b]$. Рассмотрим разностное отношение

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt.$$

Проверим, что предел этого разностного отношения равен $f(x_0)$. Действительно, зададимся произвольным $\varepsilon > 0$ и подберем $\delta > 0$ таким образом, чтобы $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ едва лишь $|x-x_0| < \delta$. Поскольку $\int_{x_0}^x 1\,dt = x - x_0$, то для $|x-x_0| < \delta$

$$|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt - f(x_0)| = |\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x (f(t)-f(x_0))\,dt| \leqslant \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x |f(t)-f(x_0)|\,dt < \varepsilon.$$

Тем самым мы проверили, что $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a,b]$ и что F – одна из первообразных для f. Пусть $F_1 = F + d$ – любая другая первообразная. Тогда

$$\int_a^b f(t)\,dt = F_1(b) - F_1(a) = F_1(t)\Big|_a^b.$$

Эта формула называется формулой Ньютона-Лейбница.

Геометрический смысл определенного интеграла связан с понятием площади фигуры. Рассмотрим площадь $S(x)$ переменной криволинейной трапеции, ограниченной сверху непрерывной кривой $y = f(x) \geqslant 0$, снизу – координатной осью $y = 0$, справа и слева – прямыми $x = a$ и $x = b$. Пусть x получает приращение Δx (для определенности пусть $\Delta x > 0$). Тогда площадь изменится на величину ΔS, ограниченной дугой кривой $y = f(x)$, прямыми $y = 0$, $x = x_0$ и $x = x_0 + \Delta x$. Сравнивая площади получим неравенства

$$m\Delta x \leqslant \Delta S \leqslant M\Delta x, \quad m = \min_{x \in [x_0, x_0+\Delta x]} f(x),\ M = \max_{x \in [x_0, x_0+\Delta x]} f(x)$$

(если $\Delta x < 0$, знаки неравенств будут противоположны). При $\Delta x \to 0$ значения m и M стремятся к $f(x_0)$. По теореме об ограниченной сходимости $S'(x_0) = f(x_0)$.

Таким образом, определенный интеграл от непрерывной неотрицательной функции при $a \leqslant b$ равен площади соответствующей криволинейной трапеции. В общем случае площадь криволинейной трапеции равна

$$\int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Физический смысл определенного интеграла рассмотрим на примере следующей задачи: Зная скорость $v = v(t) \geqslant 0$ прямолинейного движения точки, найти пройденный ею путь за промежуток времени $0 \leqslant t \leqslant T$. Воспользуемся формулой $v(t) = x'(t)$, где $x(t)$ – уравнение движения точки по оси Ox. Тогда

$$s = x(T) - x(0) = \int_0^T v(t)\,dt. \tag{4}$$

Если скорость меняет знак, то эта формула дает лишь изменение абсциссы точки за время T. Чтобы найти пройденный путь в этом случае рассматривают

$$\int_0^T |v(t)|\,dt.$$

Из формулы (4) легко получить закон движения точки

$$x(T) = x(0) + \int_0^T v(t)\,dt.$$

Теорема (о среднем). Определенный интеграл от непрерывной функции равен произведению длины промежутка интегрирования на значение подынтегральной функции в промежуточной точке.
$\lhd$: Применяем формулу Ньютона-Лейбница и теорему о среднем для первообразной $F(x)$

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = (b-a)F'(c) = (b-a)f(c).\ \rhd$$

Число $f(c) = \mu$ из этой теоремы иногда называют средним значением функции f на $[a,b]$

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt.$$

Понятие определенного интеграла естественно распространяется на кусочно-непрерывные функции. Так называют функции или непрерывные на $[a,b]$, или имеющие на $[a,b]$ конечное число точек разрыва первого рода. Определение и свойства определенного интеграла полностью на них переносятся.

ЛЕКЦИЯ 2.7. *Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле. Применение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур. Длина дуги кривой и ее вычисление. Вычисление объемов тел.*

Пусть $f, g \in C^1[a,b]$, $a < b$. Тогда, как известно, справедлива формула интегрирования по частям

$$\int fg'\,dt = f\cdot g - \int gf'\,dt,$$

связывающая первообразные функций $g'f$ и $f'g$. По формуле Ньютона-Лейбница аналогичное равенство справедливо и для определенного интеграла:

$$\int_a^b fg'\,dt = (f\cdot g)\big|_a^b - \int_a^b gf'\,dt,$$

также называемое формулой интегрирования по частям.

Аналогично получают правило замены переменной. Пусть $f \in C[a,b]$, $\phi : [c,d] \to [a,b]$ – непрерывно дифференцируемая функция, $\phi(c) = a$, $\phi(d) = b$. Тогда

$$\int f(t)\,dt = \int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx$$

и интеграл слева – первообразная для $f(t)$ на $[a,b]$, справа – первообразная для $f(\phi(x))\phi'(x)$ на $[c,d]$. Раз совпадают значения первообразных, то совпадают и их приращения:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_c^d f(\phi(x))\phi'(x)\,dx.$$

Несколько формул для вычисления площади фигур, ограниченных кривыми на плоскости:

1) $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx$, границы фигуры – графики функций переменной x и вертикальные прямые $x = a$, $x = b$, $f_1(x) \leqslant f_2(x)$,

2) $S = \int_c^d (g_2(y) - g_1(y))\,dy$, границы фигуры – графики функций переменной y и горизонтальные прямые $y = c$, $y = d$, $g_1(y) \leqslant g_2(y)$,

3) $S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t)\,dt$, границы фигуры – параметрически заданная гладкая кривая $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t) \geqslant 0$, вертикальные прямые $t = t_1$, $t = t_2$ и горизонтальная прямая $y = 0$,

4) площадь в полярных координатах для фигуры, ограниченной непрерывной линией $\rho = f(\phi)$ и двумя лучами $\phi = \alpha$, $\phi = \beta$, задается формулой $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\phi)\,d\phi$.

Еще одна задача, которая решается при помощи определенного интеграла, – это задача по подсчета длины кривой на плоскости. По определению длиной дуги называют предел (если такой существует), к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда число звеньев ломаной неограниченно возрастает, а длина ее наибольшего звена стремится к нулю. Пусть кривая на плоскости задана графиком функции $y = f(x)$, $f \in C^1[a,b]$. Рассмотрим длину специальной ломаной, вписанной в эту кривую

$$\sum_{\frac{i}{n}\in[a,b],\ i\in\mathbb{Z}} \sqrt{(1/n)^2 + (f(i/n+1/n) - f(i/n))^2}.$$

Составим интегральную сумму, которая соответствует выписанному выражению

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{\frac{i}{n}\in[a,b],\ i\in\mathbb{Z}} \sqrt{1 + (f'(i/n))^2}.$$

Она стремится к

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(f')^2}\,dt.$$

Как и для функционала площади для длины дуги имеются аналоги формул 1)-4). Основой их получения является выражение для дифференциала дуги:

$$l'(x) = \sqrt{1+(f')^2}, \quad dl = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}.$$

В полярной системе координат $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$,

$$dx = \cos\phi\,dr - r\sin\phi\,d\phi, \quad dy = \sin\phi\,dr + r\cos\phi\,d\phi.$$

Поэтому

$$dl = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\phi)^2}.$$

Если $r = r(\phi)$ – гладкая кривая на $[\alpha,\beta]$, то длина этой кривой равна

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+(r')^2}\,d\phi,$$

где r' – производная r по ϕ.

Задача вычисления объемов некоторых тел также может быть сведена к вычислению определенного интеграла от функции одного переменного.

5) Пусть $S(x)$ – закон изменения площади поперечного сечения плоскостью, перпендикулярной оси Ox в точке с абсциссой x. Пусть контур этого сечения непрерывно зависит от x и $S \in C[a,b]$. Тогда естественно считать, что объем тела, состоящего из этих сечений, равен

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$

6) Частным случаем 5) является такая задача: найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной линией $y = f(x)$, $f(x) \geqslant 0$, $x \in [a,b]$ и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$. Здесь поперечным сечением является круг радиуса $f(x)$,

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$