Министерство образования Российской Федерации

"МАТИ"- РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО

Кафедра "Высшая математика"

А. С. Кочуров

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИТИЧЕСКУЮ ГЕОМЕТРИЮ

(краткий конспект)

Москва 2003 г.

ЛЕКЦИЯ 2.1. Линии на плоскости и их уравнения. Прямая на плоскости. Различные формы уравнений прямой на плоскости. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.

Одной из задач, решаемых в курсе алгебры и геометрии, является задача исследования формы, расположения и свойств линий на плоскости и в пространстве, поверхностей в пространстве и т.д. Изучение этих вопросов начнем с рассмотрения понятия линии на плоскости. Будем считать, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ выбран стандартный базис и (x, y) означает координатную запись векторов в этом пространстве.

Пусть $F : U \to \mathbb{R}$ – некоторая действительнозначная функция, заданная на подмножестве $U \subset \mathbb{R}^2$ точек $(x, y) \in U$. Соотношение $F(x, y) = 0$ называется уравнением на U. Будем предполагать, что те пары $(x, y) \in U$, которые ему удовлетворяют, не заполняют целый "кусок плоскости" (не уточняя, что это означает более подробно, отметим, что тождества типа $F(x, y) = (x + y)^2 - x^2 - 2xy - y^2 \equiv 0$ обычно считают не уравнениями, а именно тождествами). Линией, задаваемой функцией F (или уравнением $F = 0$), называют совокупность

$$\{(x, y) \in U \mid F(x, y) = 0\}.$$

Таким образом линия на плоскости – это прежде всего некоторый набор точек плоскости.

Примеры уравнений и линий, задаваемых этими уравнениями.

1. $F(x, y) = x - y - 1$, $U = \mathbb{R}^2$, – действительнозначная функция, $x - y - 1 = 0$ – уравнение линии на плоскости. Эта линия представляет из себя сдвиг биссектрисы первого и третьего координатных углов на одну единицу вниз.

2. $F(x, y) = x^2 - y^2$, $U = \mathbb{R}^2$, – действительнозначная функция, $x^2 - y^2 = 0$ – уравнение линии на плоскости; оно может быть записано в виде $(x - y)(x + y) = 0$. Эта линия представляет из себя, таким образом, объединение двух биссектрис: первого-третьего и второго-четвертого координатных углов.

3. $F(x, y) = x^2 + y^2$, $U = \mathbb{R}^2$, – действительнозначная функция, $x^2 + y^2 = 0$ – уравнение линии на плоскости; единственная удовлетворяющая ему точка – это начало координат $(x, y) = (0, 0)$. Эта линия представляет из себя одну точку. Данное уравнение определяет, как говорят, вырожденную линию.

4. $F(x, y) = x^2 + y^2 + 1$, $U = \mathbb{R}^2$, – действительнозначная функция, $x^2 + y^2 + 1 = 0$ – уравнение на плоскости. Этому уравнению не удовлетворяет ни одна точка, оно не определяет линии.

5. Важным примером линии является график функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Для этого случая $F(x, y) = y - f(x)$, $U = [a, b] \times \mathbb{R}$ – полоса, неограниченно продолжающаяся над и под отрезком $[a, b]$ оси Ox. При этом линия, определяемая уравнением $F(x, y) = 0$, совпадает с графиком функции $y = f(x)$:

$$\{(x, y) \in U \mid F(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in U \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in [a, b]\}.$$

Пусть $\varphi, \psi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ – две действительнозначные функции, заданные на промежутке $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$. Говорят, что система

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \qquad t \in \langle a, b\rangle,$$

задает параметрическое представление линии на плоскости. Это задание происходит следующим образом: линией считается совокупность точек

$$\{(\varphi(t), \psi(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \langle a, b\rangle\}$$

плоскости.

Примеры линий, задаваемых параметрически.

6. Пусть $r > 0$ фиксировано. Уравнения $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, – параметрическое представление окружности радиуса $r > 0$ с центром в начале координат. Эта же окружность может быть задана также и уравнением $x^2 + y^2 - r^2 = 0$.

7. Уравнения $x = \theta\cos\theta$, $y = \theta\sin\theta$, $\theta \in [0, +\infty)$ задают параметрическое представление спирали Архимеда, уравнения $x = \theta^{-1}\cos\theta$, $y = \theta^{-1}\sin\theta$, $\theta \in (0, +\infty)$ – параметрическое представление гиперболической спирали.

8. Каждый график функции из примера 5 можно представить как параметрическое представление линии $x = t$, $y = f(t)$, $t \in [a, b]$.

Алгебраические линии.

Важным классом линий являются линии, задаваемые алгебраическими уравнениями. Это уравнения следующих видов:

$$Ax + By + C = 0, \tag{1}$$

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{2}$$

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Iy + J = 0 \tag{3}$$

и т.д. В этих уравнениях $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ – некоторые фиксированные числа; они называются коэффициентами указанных уравнений. Уравнение (1) называется общим уравнением 1-й степени, если в нем коэффициенты A

и B одновременно не обращаются в ноль. Коротко это условие обычно записывают так: $A^2 + B^2 \neq 0$. Уравнение (2) называется общим уравнением 2-й степени, если в нем $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Аналогично, уравнение (3) называется общим уравнением 3-й степени, если в нем $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 \neq 0$. Уравнения 4-й, 5-й и далее степеней строятся по подобным правилам.

В качестве неалгебраических уравнений можно рассмотреть, к примеру, такие:

$$y - \sin x = 0, \qquad 2^{xy} - x - y = 0.$$

Иногда линия может быть задана описательным образом (как геометрическое место точек, подчиненных заданному условию). При этом одним из первых возникает вопрос о выводе уравнения этой линии (обычного или параметрического). Так, например, единичная окружность с центром в начале координат может задана как геометрическое место точек, лежащих на расстоянии 1 от начала координат.

Прямые линии, или просто прямые, на плоскости.

Алгебраические линии 1-й степени называют прямыми на плоскости. Таким образом, уравнением, задающим прямую на плоскости, является уравнение $Ax+By+C = 0$, A, B и C – фиксированные числа, $A^2+B^2 \neq 0$. Производя тождественные преобразования равенства $Ax + By + C = 0$, получают различные формы уравнения, задающего эту прямую.

Одним из таких преобразований является умножение коэффициентов A, B и C уравнения на одно и тоже число $a \neq 0$: понятно, что уравнения

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{и} \quad (aA)x + (aB)y + (aC) = 0$$

определяют одну и ту же прямую. Поскольку коэффициенты A и B не должны одновременно обращаться в ноль, то исходное уравнение всегда можно привести к одному из двух видов: если $B \neq 0$, то выбрав $a = 1/B$, получим уравнение $y + (A/B)x + (C/B) = 0$ – первый вид, прямые, непараллельные оси Oy. Если же $B = 0$, то $A \neq 0$; выбрав $a = 1/A$, получим уравнение $x + (C/A) = 0$ – второй вид, прямые, параллельные оси Oy.

Пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) – две различные точки, лежащие на одной прямой: $Ax_1 + By_1 + C = 0$, $Ax_2 + By_2 + C = 0$. Тогда

$$A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2) = 0.$$

В терминах операции скалярного произведения векторов последнее равенство можно переписать в виде $((A, B), (x_1 - x_2, y_1 - y_2)) = 0$, т.е. вектор $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ перпендикулярен вектору (A, B). Иными словами, вектор $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ пропорционален вектору $(B, -A)$. Для любой пары различных точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2), лежащих на одной прямой, вектор $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ носит специальное название – направляющего вектора этой прямой. Согласно сказанному выше, все направляющие вектора одной прямой пропорциональны между собой и пропорциональны вектору $(B, -A)$. Верно также и обратное: если точка (x_1, y_1) принадлежит прямой $Ax + By + C = 0$, а вектор $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ пропорционален вектору $(B, -A)$, то точка (x_2, y_2) принадлежит прямой $Ax + By + C = 0$:

$$\{Ax_1 + By_1 + C = 0, \quad A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2) = 0\} \Rightarrow \quad Ax_2 + By_2 + C = 0.$$

Поэтому прямую задают также и в такой форме: прямая – это совокупность пропорциональных векторов $t\bar{v}$ (здесь $\bar{v} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \neq \bar{0}$, $t \in \mathbb{R}$) плоскости, отложенных от некоторой фиксированной точки $\bar{w} = (x_1, y_1)$ этой плоскости:

$$\{t\bar{v} + \bar{w} \mid t \in \mathbb{R}\}. \tag{4}$$

Согласно сказанному выше, такая совокупность не зависит от выбора конкретных представителей $\bar{v}$ и $\bar{w}$ прямой. Таким образом, если известны 2 различные точки, лежащие на какой-либо прямой, то (4) задает эту прямую (в, по сути дела, параметрической форме).

Одним из основных инструментов, используемых при изучении алгебраических линий, является скалярное произведение векторов. Вспомним его определение (в частном случае, когда векторное пространство $\Re$ является плоскостью):

Отображение $(\bar{v}, \bar{w})$, областью определения которого является $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ — множество всевозможных пар векторов векторного пространства $\mathbb{R}^2$, а областью значений — числовая прямая, называется скалярным произведением, если выполняются 4 аксиомы скалярного произведения:

1) $(\bar{v}, \bar{w}) = (\bar{w}, \bar{v})$,
2) $(\bar{v}, \alpha\bar{w}) = \alpha(\bar{v}, \bar{w})$, α — число и, значит, $(\alpha\bar{v}, \beta\bar{w}) = \alpha\beta(\bar{v}, \bar{w})$
3) $(\bar{v}, \bar{w}_1 + \bar{w}_2) = (\bar{v}, \bar{w}_1) + (\bar{v}, \bar{w}_2)$,
4) $(\bar{v}, \bar{v}) > 0$, если $\bar{v} \neq 0$.

Как известно, в терминах скалярного произведения определяются углы между векторами и расстояния между точками.

Углом (а точнее парой углов) между двумя прямыми

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

называют ту пару углов, которая образована всевозможными парами направляющих векторов этих прямых. Таким образом, парой углов между прямыми можно считать два угла: угол между векторами $(B_1, -A_1)$ и $(B_2, -A_2)$ и угол между векторами $(B_1, -A_1)$ и $(-B_2, A_2)$ или, что тоже самое, угол между векторами (A_1, B_1) и (A_2, B_2) и угол между векторами (A_1, B_1) и $(-A_2, -B_2)$. Иногда углом между прямыми считают меньший из этих двух углов.

Пусть $\{t\bar{v} + \bar{w} \mid t \in \mathbb{R}\}$ – некоторая прямая на плоскости, $\bar{u}$ – некоторая точка этой плоскости. Расстоянием $\operatorname{dist}(\bar{u}, L)$ от точки $\bar{u}$ до прямой $L = \{t\bar{v} + \bar{w} \mid t \in \mathbb{R}\}$ называют минимум

$$\min\{|\bar{u} - t\bar{v} - \bar{w}| \mid t \in \mathbb{R}\}$$

расстояний от точки $\bar{u}$ до различных точек $t\bar{v} + \bar{w}$ прямой. Запишем задачу нахождения этого расстояния в аналитической форме: по сути дела нужно найти минимум функции

$$f(t) = (\bar{u} - t\bar{v} - \bar{w}, \bar{u} - t\bar{v} - \bar{w}) = (\bar{u} - \bar{w}, \bar{u} - \bar{w}) - 2t(\bar{u} - \bar{w}, \bar{v}) + t^2(\bar{v}, \bar{v})$$

по переменной t (точнее – квадратного корня из $f(t)$). Функция $f(t)$ – парабола с ветвями, направленными вверх (т.к. $(\bar{v}, \bar{v}) \neq 0$). Ее минимум достигается в точке τ, где $f'(\tau) = 0$. Поэтому

$$\tau(\bar{v}, \bar{v}) = (\bar{u} - \bar{w}, \bar{v}), \quad f(\tau) = (\bar{u} - \bar{w}, \bar{u} - \bar{w}) - \tau(\bar{u} - \bar{w}, \bar{v}) = \frac{(\bar{u} - \bar{w}, \bar{u} - \bar{w})(\bar{v}, \bar{v}) - (\bar{u} - \bar{w}, \bar{v})^2}{(\bar{v}, \bar{v})}.$$

Согласно неравенству Коши-Буняковского $f(\tau) \geqslant 0$, $\operatorname{dist}(\bar{u}, L) = \sqrt{f(\tau)}$.

ЛЕКЦИЯ 2.2. Общее уравнение плоскости, его исследование. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки. Угол между плоскостями. Расстояние от точки до плоскости.

Будем считать, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ выбран стандартный базис и (x, y, z) с индексами или без них означает координатную запись векторов в этом пространстве. По аналогии с понятием линии на плоскости рассматривается понятие поверхности в пространстве. Также как и для линий, поверхность может задаваться 1) уравнением и 2) параметрически. Рассмотрим примеры поверхностей, заданных уравнением.

1. $F(x, y) = x + y + z$, $U = \mathbb{R}^3$, – действительнозначная функция, $x + y + z = 0$ – уравнение поверхности (точнее – плоскости) в пространстве. Эта плоскость проходит через начало координат, пересекает координатную плоскость Oxy по прямой $x + y = 0$, координатную плоскость Oxz – по прямой $x + z = 0$. Можно привести и другие ее свойства.

2. $F(x, y) = x^2 + y^2 + z^2$, $U = \mathbb{R}^3$, – действительнозначная функция, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ – уравнение поверхности в пространстве; единственная удовлетворяющая ему точка – начало координат $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, – поверхность представляет из себя эту точку. Данное уравнение определяет вырожденную поверхность.

3. $F(x, y) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, $U = \mathbb{R}^3$, – действительнозначная функция, $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ – уравнение поверхности в пространстве (сферы радиуса 1). Данная поверхность состоит из точек, удаленных от начала координат на расстояние 1.

4. Является обобщением предыдущих двух примеров. Фиксируем какое-нибудь неотрицательное число r. $F(x, y) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$, $U = \mathbb{R}^3$, – действительнозначная функция, $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ – уравнение поверхности в пространстве (сферы радиуса r). Данная поверхность состоит из точек, удаленных от начала координат на расстояние r.

5. $F(x, y) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$, $U = \mathbb{R}^3$, – действительнозначная функция, $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ – уравнение в пространстве. Этому уравнению не удовлетворяет ни одна точка, оно не определяет поверхности.

6. Как и для линий, выражения вида $(x + y + z)^2 - x^2 - y^2 - z^2 - 2(xy + xz + yz) \equiv 0$ являются тождествами, не являются уравнениями и не задают поверхности.

7. С каждой линией L на плоскости Oxy, заданной уравнением $F(x, y) = 0$, $F : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$, связана так называемая цилиндрическая поверхность или цилиндр над L. Эта поверхность состоит из всевозможных прямых в пространстве, проходящих через точки L параллельно оси Oz.

Пусть $F : U \to \mathbb{R}$ – некоторая действительнозначная функция, заданная на подмножестве $U \subset \mathbb{R}^3$ точек $(x, y, z) \in U$. Соотношение $F(x, y, z) = 0$ называется уравнением на U. Будем предполагать, что те пары $(x, y, z) \in U$, которые ему удовлетворяют, не заполняют целый "кусок пространства". Поверхностью, задаваемой функцией F (или уравнением $F = 0$), называют совокупность

$$\{(x, y, z) \in U \mid F(x, y, z) = 0\}.$$

Таким образом поверхность в пространстве – это некоторый набор точек пространства.

При обсуждении того как задаются параметрические поверхности используется понятие области $\mathcal{V}$ на плоскости. Оно имеет вполне определенный математический смысл, однако на данный момент давать его не будем. Под областью будем понимать "кусок или несколько кусков плоскости". Примерами областей являются круг, квадрат на плоскости, объединение круга и квадрата, вся плоскость, полуплоскость. В тоже время линия на плоскости областью не является. Пусть $\alpha, \beta, \gamma : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ – три действительнозначные функции, заданные на области $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$. Говорят, что система

$$\begin{cases} x = \alpha(u,v), \\ y = \beta(u,v), \\ z = \gamma(u,v) \end{cases} \qquad (u,v) \in \mathcal{V},$$

задает параметрическое представление поверхности в пространстве. Это задание происходит следующим образом: поверхностью считается совокупность точек

$$\{(\alpha(u,v), \beta(u,v), \gamma(u,v)) \in \mathbb{R}^3 \mid (u,v) \in \mathcal{V}\}$$

пространства.

Примеры задаваемых параметрически поверхностей.

8. Уравнения $x = u$, $y = v$, $z = -u - v$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, задают параметрическое представление плоскости $x + y + z = 0$ из примера 1.

9. Несколько более сложным является параметрическое представление сферы радиуса $r > 0$ из примера 4. Уравнения

$$\begin{cases} x = r\cos u \cos v, \\ y = r\sin u \cos v, \\ z = r\sin v \end{cases} \qquad (u,v) \in \mathcal{V},$$

являются примером такого задания. При этом $\mathcal{V} = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ – прямоугольник на плоскости со сторонами длины 2π и π.

Алгебраические поверхности.

Как и для линий на плоскости важным классом поверхностей являются поверхности, задаваемые алгебраическими уравнениями. Это уравнения следующих видов:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1}$$

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \tag{2}$$

и т.д. В этих уравнениях $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ – некоторые фиксированные числа; они называются коэффициентами указанных уравнений. Уравнение (1) называется общим уравнением 1-й степени, если в нем $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Уравнение (2) называется общим уравнением 2-й степени, если в нем $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 \neq 0$.

Плоскость в пространстве.

Алгебраические поверхности 1-й степени называют плоскостями в пространстве. Таким образом, уравнением, задающим плоскость в пространстве, является уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, A, B, C и D – фиксированные числа, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Производя тождественные преобразования равенства $Ax + By + Cz + D = 0$, получают различные формы уравнения, задающего эту плоскость.

Как и для случая линии на плоскости одним из таких преобразований является умножение коэффициентов A, B, C и D на одно и тоже число $a \neq 0$: уравнения

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{и} \quad (aA)x + (aB)y + (aC)z + (aD) = 0$$

определяют одну и ту же плоскость. Коротко обозначим возможные результаты таких преобразований. Коэффициенты A, B и C не должны одновременно обращаться в ноль. Если $C \neq 0$, то, выбрав $a = 1/C$, получим уравнение плоскости $z + (A/C)x + (B/C)y + (D/C) = 0$. Из него видно, что исходная поверхность может быть задана как график функции $z = f(x,y) = -(A/C)x - (B/C)y - (D/C)$ от переменных $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Если же $C = 0$, то такого преобразования выполнить невозможно, исходная плоскость задается уравнением $Ax + By + D = 0$ и является цилиндром над прямой $Ax + By + D = 0$ в плоскости Oxy. Понятно, что такой цилиндр нельзя задать как график некоторой функции $z = f(x,y)$ переменных $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Однако ее можно задать как график функции других переменных. А именно, пусть $B \neq 0$, $a = 1/B$. Тогда исходное уравнение преобразуется к виду $y + (A/B)x + (D/B) = 0$ и плоскость может быть задана как график функции $y = f(x,z) = -(A/B)x - (D/B)$ от переменных $(x,z) \in \mathbb{R}^2$. Если же помимо $C = 0$ также и $B = 0$, то исходная плоскость является цилиндром как над прямой в плоскости Oxy, так и цилиндром над прямой в плоскости Oxz. Поэтому ее нельзя также задать как график некоторой функции $y = f(x,z)$ переменных $(x,z) \in \mathbb{R}^2$. Но в этом случае обязательно $A \neq 0$ и можно выбрать $a = 1/A$. Получающееся уравнение $x + (D/A) = 0$ задает плоскость, являющуюся графиком функции $x = f(y,z) = -(D/A)$ от переменных $(y,z) \in \mathbb{R}^2$. Аналогичные преобразования и их интерпретация связаны с первоначальным рассмотрением коэффициентов B или A.

Пусть (x_1, y_1, z_1) – точка, лежащая на плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0.$$

Тогда уравнение плоскости может быть записано в виде

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \tag{3}$$

В терминах скалярного произведения последнее равенство можно переписать в виде

$$((A, B, C), (x - x_1, y - y_1, z - z_1)) = 0,$$

т.е. вектор $(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ перпендикулярен вектору (A, B, C). Запись уравнения плоскости в пространстве вида (3) имеет, таким образом, следующий геометрический смысл: это плоскость, проходящая через точку (x_1, y_1, z_1) перпендикулярно вектору (A, B, C). Вектор (A, B, C) имеет специальное название — нормали к плоскости. Понятно, что все нормали пропорциональны между собой – лежат на одной прямой.

Выпишем уравнение плоскости в пространстве, проходящей через три фиксированные точки (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3), не лежащие на одной прямой. Пусть (x, y, z) – произвольная точка этой плоскости. Согласно записи (3), вектора $(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ и $(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$ перпендикулярны одному и тому же (неизвестному) ненулевому вектору коэффициентов (A, B, C). Поэтому эти 3 вектора не могут быть линейно независимыми (если бы они оказались линейно независимыми, то в $\mathbb{R}^3$ нашлись бы 4 линейно независимых вектора). Поэтому по теореме Кронекера-Капелли

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Нетрудно увидеть, что это и есть искомое уравнение: оно имеет вид (1) и любая из трех точек (x_i, y_i, z_i), $i = 1, 2, 3$, ему удовлетворяет. Условие – три точки не лежат на одной прямой, используется здесь, чтобы обосновать тот факт, что хотя бы один из коэффициентов A, B или C уравнения (1) не равен 0 (для этого еще раз используется теорема Кронекера-Капелли).

Уравнение (4) позволяет задать параметрическое представление плоскости. Введем обозначения $\bar{u} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \neq \bar{0}$, $\bar{v} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1) \neq \bar{0}$, $\bar{w} = (x_1, y_1, z_1)$. Тогда, согласно (4), плоскость – это множество

$$\{s\bar{u} + t\bar{v} + \bar{w} \mid s, t \in \mathbb{R}\} \tag{5}$$

линейных комбинаций векторов $\bar{u}$, $\bar{v}$, отложенных от точки $\bar{w}$.

По аналогии с прямыми на плоскости, углом (а точнее парой углов) между двумя плоскостями, заданными уравнениями вида (1), называют пару углов, которую образуют между собой всевозможные нормали этих плоскостей. Иногда углом между плоскостями считают меньший из этих двух углов.

Зафиксируем какую-нибудь точку $\bar{p}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$. Назовем расстоянием от $\bar{p}$ до плоскости (5) значение задачи минимизации

$$\min_{s,t \in \mathbb{R}} |\bar{p} - s\bar{u} - t\bar{v} - \bar{w}|.$$

Как и в плоском случае запишем эту задачу в аналитической форме: требуется найти минимум по переменным s, t функции

$$f(s, t) = (\bar{p} - s\bar{u} - t\bar{v} - \bar{w}, \bar{p} - s\bar{u} - t\bar{v} - \bar{w}) =$$
$$= (\bar{p} - \bar{w}, \bar{p} - \bar{w}) - 2s(\bar{p} - \bar{w}, \bar{u}) + s^2(\bar{u}, \bar{u}) - 2t(\bar{p} - \bar{w}, \bar{v}) + t^2(\bar{v}, \bar{v}) + 2st(\bar{u}, \bar{v}). \tag{6}$$

После вычисления из результата нужно извлечь квадратный корень. Чтобы не усложнять рассмотрения, воспользуемся результатами, о которых еще не было речи и знакомство с которыми происходит при изучении функций нескольких переменных. По аналогии с задачей минимизацией функции одного переменного, в (6) имеется точка минимума (s_0, t_0) и она одновременно является точкой минимума по переменной s и по переменной t по отдельности. Таким образом

$$-(\bar{p} - \bar{w}, \bar{v}) + t_0(\bar{v}, \bar{v}) + s_0(\bar{u}, \bar{v}) = 0,$$
$$-(\bar{p} - \bar{w}, \bar{u}) + s_0(\bar{u}, \bar{u}) + t_0(\bar{u}, \bar{v}) = 0.$$

Используя 2 этих равенства перепишем (6) в виде

$$f(s_0, t_0) = (\bar{p} - \bar{w}, \bar{p} - \bar{w}) - s_0(\bar{p} - \bar{w}, \bar{u}) - t_0(\bar{p} - \bar{w}, \bar{v}).$$

Исключим неизвестную t_0:

$$t_0 = (\bar{p} - \bar{w}, \bar{v})/(\bar{v}, \bar{v}) - s_0(\bar{u}, \bar{v})/(\bar{v}, \bar{v}),$$

$$-\Big((\bar p-\bar w,\bar u)-(\bar p-\bar w,\bar v)(\bar u,\bar v)/(\bar v,\bar v)\Big)+s_0\Big((\bar u,\bar u)-(\bar u,\bar v)^2/(\bar v,\bar v)\Big)=0,$$
$$f(s_0,t_0)=\Big((\bar p-\bar w,\bar p-\bar w)-(\bar p-\bar w,\bar v)^2/(\bar v,\bar v)\Big)-s_0\Big((\bar p-\bar w,\bar u)-(\bar p-\bar w,\bar v)(\bar u,\bar v)/(\bar v,\bar v)\Big).$$

Коэффициент $((\bar u,\bar u)-(\bar u,\bar v)^2/(\bar v,\bar v))$ при неизвестной s_0 строго больше нуля в силу неравенства Коши-Буняковского и линейной независимости векторов $\bar u$ и $\bar v$. Поэтому s_0 можно вычислить и подставить в выражение для $f(s_0,t_0)$:

$$f(s_0,t_0)=\Big((\bar p-\bar w,\bar p-\bar w)-(\bar p-\bar w,\bar v)^2/(\bar v,\bar v)\Big)-\frac{\Big((\bar p-\bar w,\bar u)-(\bar p-\bar w,\bar v)(\bar u,\bar v)/(\bar v,\bar v)\Big)^2}{(\bar u,\bar u)-(\bar u,\bar v)^2/(\bar v,\bar v)}.$$

Если пара векторов $\bar u$ и $\bar v$ является ортонормированной: $(\bar u,\bar u)=(\bar v,\bar v)=1$, $(\bar u,\bar v)=0$, то выражение для $f(s_0,t_0)$ заметно упрощается:

$$\sqrt{f(s_0,t_0)}=\sqrt{(\bar p-\bar w,\bar p-\bar w)-(\bar p-\bar w,\bar u)^2-(\bar p-\bar w,\bar v)^2}.$$

ЛЕКЦИЯ 2.3. Канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. Общие уравнения прямой в пространстве, приведение к каноническому виду. Угол между прямой и плоскостью, между двумя прямыми.

Как и прежде будем считать, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ выбран стандартный базис и (x,y,z) означает координатную запись векторов в этом пространстве.

Под линией в $\mathbb{R}^3$ будем понимать пересечение двух поверхностей, заданных в этом пространстве (при помощи уравнений или параметрическим способом). При этом, как и прежде, предполагается, что это пересечение является "существенным", т.е. не содержит значительных "кусков" поверхностей. В частности, если в качестве двух поверхностей выбрать одну и ту же поверхность, то в пересечении получится она же и получится, – это поверхность, а не линия.

1. Два уравнения

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-1=0,\\ (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2-14=0\end{cases}\qquad(1)$$

совместно определяют окружность (как пересечение двух сфер). Другим, эквивалентным, способом записать эту систему уравнений можно так

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-1=0,\\ 2x+4y+6z-1=0.\end{cases}$$

Выражая из второго уравнения, например, переменную z и делая подстановку в первое уравнения, получим

$$\begin{cases}x^2+y^2+(1/6-x/3-2y/3)^2-1=0,\\ z=1/6-x/3-2y/3.\end{cases}$$

В этом представлении к первому уравнению можно относиться как к уравнению линии (эллипса) на плоскости Oxy. Эта линия является проекцией окружности (1) на Oxy. Сама окружность (1) расположена в плоскости, определяемой вторым уравнением. Кроме того, первое уравнение – это в то же время уравнение цилиндрической поверхности.

Прямая в пространстве.

Прямые в пространстве обычно задают как пересечение пары плоскостей в пространстве. Таким образом, системой уравнений, задающей прямую в пространстве, является

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}\qquad(2)$$

$A_1,B_1,C_1,D_1,A_2,B_2,C_2,D_2$ – фиксированные числа, $A_1^2+B_1^2+C_1^2\neq0$, $A_2^2+B_2^2+C_2^2\neq0$. Чтобы выписанные уравнения определяли разные плоскости, в данном случае необходимо, чтобы одно уравнение не сводилось к другому. Иными словами, необходимо, чтобы вектора (A_1,B_1,C_1,D_1) и (A_2,B_2,C_2,D_2) не были бы пропорциональны. При выполнении этого условия выписанные уравнения определяют две разные плоскости в пространстве. Чтобы они имели общие точки, необходимо, чтобы они не были бы параллельны, т.е. чтобы их нормали (A_1,B_1,C_1) и (A_2,B_2,C_2) не были бы пропорциональны. В этом случае, производя тождественные преобразования можно получить различные формы системы уравнений, задающей эту прямую. Если (x_0, y_0, z_0) – произвольная точка, расположенная на прямой, то (2) может быть записана в виде

$$\begin{cases} A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0)+C_1(z-z_0)=0, \\ A_2(x-x_0)+B_2(y-y_0)+C_2(z-z_0)=0. \end{cases} \tag{3}$$

Представляя (3) в виде скалярных произведений, находим, что общее решение этой системы состоит из набора векторов, перпендикулярных векторам $\bar{a}=(A_1,B_1,C_1)$ и $\bar{b}=(A_2,B_2,C_2)$. Обозначим $(l,m,n)=[\bar{a},\bar{b}]$ – координаты векторного произведения. Каждый из ненулевых векторов, пропорциональных вектору (l,m,n) принято называть направляющим вектором прямой (2). Согласно сказанному, (2) записывается в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \qquad\qquad t\in\mathbb{R}, \\ z=z_0+nt, \end{cases} \tag{4}$$

– прямая, проходящая через (x_0, y_0, z_0) в направлении (l,m,n). Иногда из этой записи исключают t и используют такую, называемую канонической, форму записи:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

Эту форму и форму (4) удобно применять для поиска прямой, проходящей через две заданные точки (x_0,y_0,z_0) и (x_1,y_1,z_1) из $\mathbb{R}^3$. В этом случае в качестве (l,m,n) можно выбрать вектор $(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$.

По аналогии с прямыми на плоскости, углом (а точнее парой углов) между двумя прямыми, называют пару углов, которую образуют между собой всевозможные направляющие этих прямых. Иногда углом между прямыми считают меньший из этих двух углов.

Обсудим вопрос о том, как определить угол (как всегда, пару углов) между прямой и плоскостью в пространстве $\mathbb{R}^3$. Задавая прямую, будем иметь дело с ее направляющими (l,m,n), задавая плоскость, будем иметь дело с ее нормалями (A,B,C). Используя понятие скалярного произведения легко подсчитать модуль b косинуса угла между этими векторами. Парой углов же между прямой и плоскостью естественно считать углы α в промежутке $[0,\pi)$, удовлетворяющие равенству $\sin\alpha=b$ (или меньший из них, т.е. лежащий в промежутке $[0,\pi/2]$).

Упражнения.

1. Какие геометрические образы в пространстве соответствуют уравнениям

а) $xy=0$;
б) $z^2=2x$;
в) $xz=yz$;
г) $y^2+y-2=0$;
д) $y=1,\ z=-2$;
е) $x^2=0$.

2. Определить длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость $x-y+z\sqrt{2}-8=0$, и углы, образованные этим перпендикуляром с осями координат.

3. Написать уравнение плоскости, параллельной оси Oz и отсекающей на осях Ox и Oy отрезки длины 2 и 3 соответственно.

4. Написать уравнение плоскости, перпендикулярной Oz и проходящей через точку (1,2,3).

5. Какие углы образует прямая $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{-\sqrt{2}}$ с осями координат? С координатными плоскостями?

6. Написать уравнение сферы с центром в точке (2,-2,1), проходящей через начало координат.

ЛЕКЦИЯ 2.4. *Преобразования координат. Собственные векторы и собственные числа матрицы, их свойства. Характеристический многочлен матрицы, его свойства.*

Пусть x, y – декартовы координаты плоскости. Рассмотрим понятие преобразования этой плоскости. Очень часто в качестве преобразований выступает не одно, а целое семейство, зависящее от определенного параметра v, отображений $A[v]$ плоскости в себя, обладающее среди прочих следующими важными свойствами:
1) для любых двух значений параметра v_1, v_2 преобразования $A[v_1]$, $A[v_2]$ можно выполнить последовательно одно за другим: определена, как говорят, композиция $A[v_2]\circ A[v_1]$ этих отображений,
2) при некотором значении параметра v_0 преобразование $A[v_0]=\mathrm{Id}$ является тождественным (т.е. отображением, оставляющим все точки плоскости неподвижными),
3) для каждого значения параметра v_1 найдется такой параметр v_2, что композиция отображений $A[v_2]\circ A[v_1]=A[v_0]$

является тождественным отображением. Об этом свойстве говорят еще, что для каждого отображения $A[v_1]$ имеется обратное отображение $A[v_2]$.

Рассмотрим некоторые примеры простейших преобразований плоскости. В первую очередь к ним относится сдвиг $\mathbb{R}^2$ как целого вдоль какого-либо вектора $\bar{z}_1 = (x_1, y_1)^*$. Это означает, что каждый вектор $\bar{z}$ из $\mathbb{R}^2$ заменяется на вектор $\bar{z} + \bar{z}_1$. В координатах такое преобразование имеет вид

$$x \to x + x_1, \quad y \to y + y_1.$$

Если это преобразование обозначить как $S[\bar{z}_1] : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, то по определению

$$S[\bar{z}_1](\bar{z}) = \bar{z} + \bar{z}_1$$

для каждого $\bar{z} \in \mathbb{R}^2$. Если $\bar{z}_1, \bar{z}_2 \in \mathbb{R}^2$ фиксированы, то определена композиция двух сдвигов – сначала $S[\bar{z}_1]$ на вектор $\bar{z}_1$, а потом $S[\bar{z}_2]$ на вектор $\bar{z}_2$:

$$(S[\bar{z}_2] \circ S[\bar{z}_1])(\bar{z}) = (S[\bar{z}_2])(\bar{z} + \bar{z}_1) = \bar{z} + \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

Таким образом, $S[\bar{z}_2] \circ S[\bar{z}_1] = S[\bar{z}_2 + \bar{z}_1] = S[\bar{z}_1] \circ S[\bar{z}_2]$. Тождественным отображением является сдвиг на нулевой вектор $S[\bar{0}]$, обратным к $S[\bar{z}_1]$ является $S[-\bar{z}_1]$.

Следующий пример – растяжения (гомотетии) плоскости $G[\lambda]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. В координатах это преобразование определяется формулами

$$x \to \lambda x, \quad y \to \lambda y.$$

Если $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, то

$$(G[\lambda_2] \circ G[\lambda_1])(\bar{z}) = (G[\lambda_2])(\lambda_1 \bar{z}) = \lambda_2 \lambda_1 \bar{z}.$$

Таким образом, $G[\lambda_2] \circ G[\lambda_1] = G[\lambda_2 \lambda_1] = G[\lambda_1] \circ G[\lambda_2]$. Тождественным отображением является гомотетия $G[1]$ с коэффициентам 1, обратным к $G[v_1]$ является $G[1/v_1]$.

Совмещая эти два примера получают преобразования, называемые сдвигами вместе с растяжениями $SG[\lambda_1, \bar{z}_1]$, $\lambda_1 \neq 0$, $\bar{z}_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$. Эти преобразования задаются формулами

$$x \to \lambda_1 x + x_1, \quad y \to \lambda_1 y + y_1$$

или $SG[\lambda_1, \bar{z}_1](\bar{z}) = \lambda_1 \bar{z} + \bar{z}_1$. Если $SG[\lambda_1, \bar{z}_1]$, $SG[\lambda_2, \bar{z}_2]$ – два таких преобразования, то

$$(SG[\lambda_2, \bar{z}_2] \circ SG[\lambda_1, \bar{z}_1])(\bar{z}) = SG[\lambda_2, \bar{z}_2](\lambda_1 \bar{z} + \bar{z}_1) = \lambda_2(\lambda_1 \bar{z} + \bar{z}_1) + \bar{z}_2 = \lambda_2 \lambda_1 \bar{z} + \lambda_2 \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

Точно также

$$(SG[\lambda_1, \bar{z}_1] \circ SG[\lambda_2, \bar{z}_2])(\bar{z}) = \lambda_2 \lambda_1 \bar{z} + \lambda_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1.$$

Поэтому, вообще говоря, $SG[\lambda_1, \bar{z}_1] \circ SG[\lambda_2, \bar{z}_2] \neq SG[\lambda_2, \bar{z}_2] \circ SG[\lambda_1, \bar{z}_1]$. Тождественным преобразованием является $SG[1, \bar{0}]$, преобразованием обратным к $SG[\lambda_1, \bar{z}_1]$ является $SG[1/\lambda_1, -\bar{z}_1/\lambda_1]$:

$$(SG[1/\lambda_1, -\bar{z}_1/\lambda_1] \circ SG[\lambda_1, \bar{z}_1])(\bar{z}) = (\lambda_1 \bar{z} + \bar{z}_1)/\lambda_1 - \bar{z}_1/\lambda_1 = \bar{z}.$$

Следующим важным примером преобразований плоскости является ее вращение $R[\varphi]$ на угол φ относительно начала координат (положительным значениям φ отвечают вращения против часовой стрелки, отрицательным – по). В координатах это преобразование задается следующим образом:

$$x \to x\cos\varphi - y\sin\varphi, \quad y \to x\sin\varphi + y\cos\varphi. \tag{1}$$

Это означает, что вектор с координатами $(x, y)^*$ превращается в вектор с координатами $(x\cos\varphi - y\sin\varphi,\ x\sin\varphi + y\cos\varphi)^*$. Посмотрим, что является образом базисных векторов $\bar{e}_1 = (1, 0)^*$, $\bar{e}_2 = (0, 1)^*$. Согласно приведенным формулам $R[\varphi](\bar{e}_1) = (\cos\varphi, \sin\varphi)^*$, $R[\varphi](\bar{e}_2) = (-\sin\varphi, \cos\varphi)^*$. Таким образом, действительно, вектора $R[\varphi](\bar{e}_1)$, $R[\varphi](\bar{e}_2)$ получаются вращением векторов $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ на угол φ. Полную проверку того, что преобразование (1) осуществляет указанный поворот оставляем для слушателей. Здесь лишь вычислим, чему равен косинус угла между векторами $\bar{z} = (x, y)^*$ и $R[\varphi](\bar{z})$, а также длину вектора $R[\varphi](\bar{z})$. Начнем с последнего. Согласно определениям

$$|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |R[\varphi](\bar{z})| = \sqrt{(x\cos\varphi - y\sin\varphi)^2 + (x\sin\varphi + y\cos\varphi)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |\bar{z}|.$$

Далее

$$\cos(\bar{z}, R[\varphi](\bar{z})) = \frac{(\bar{z}, R[\varphi](\bar{z}))}{|\bar{z}| \cdot |R[\varphi](\bar{z})|} = \frac{(x^2 + y^2)\cos\varphi}{|\bar{z}|^2} = \cos\varphi.$$

Пользуясь формулами умножения матриц, определение (1) может записано в виде

$$R[\varphi](\bar{z}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2}$$

или $R[\varphi](\bar z) = A[\varphi]\bar z$, где
$$A[\varphi] = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$
В связи с (2) говорят, что умножению вектора $\bar z$ на матрицу $A[\varphi]$ соответствует поворот этого вектора на угол φ.

Тождественным преобразованием в этом примере является поворот на нулевой угол, обратным к повороту на угол φ является поворот на угол $-\varphi$. Согласно смыслу введенных операций $R[\varphi_2]\circ R[\varphi_1] = R[\varphi_2+\varphi_1] = R[\varphi_1]\circ R[\varphi_2]$. Одним из следствий этого равенства является то, что двум последовательным вращениям плоскости сначала на угол φ_1, потом на угол φ_2 соответствует умножение вектора $\bar z$ на матрицу $A[\varphi_2+\varphi_1]$, равную произведениям $A[\varphi_2]A[\varphi_1]$ и $A[\varphi_1]A[\varphi_2]$:
$$A[\varphi_2+\varphi_1]\bar z = R[\varphi_2+\varphi_1](\bar z) = (R[\varphi_2]\circ R[\varphi_1])(\bar z) = R[\varphi_2](A[\varphi_1]\bar z) = (A[\varphi_2])A[\varphi_1]\bar z.$$
Обобщением последнего примера служит линейное преобразование плоскости. Так называют отображение $L[A]$, задаваемое в координатах следующим образом
$$x\to ax+by,\quad y\to cx+dy,\quad A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix},\quad \det A\neq 0.$$
Оно записывается также и в виде $L[A](\bar z) = A\bar z$. Если A_1, A_2 – две матрицы размера 2×2 с ненулевыми определителями, то композиции преобразований $L[A_2]\circ L[A_1]$ соответствует произведение матриц $A_2\cdot A_1$:
$$(L[A_2]\circ L[A_1])(\bar z) = L[A_2](A_1\bar z) = A_2(A_1\bar z) = (A_2\cdot A_1)\bar z.$$
При этом композиции преобразований $L[A_1]\circ L[A_2]$ соответствует произведение $A_1\cdot A_2$. Таким образом, вообще говоря, $L[A_1]\circ L[A_2]\neq L[A_2]\circ L[A_1]$. Тождественным преобразованием в этом примере является отображение $L[E]$, E – единичная матрица, обратным к $L[A]$ служит $L[A^{-1}]$.

Последний пример без каких-либо заметных изменений переносится на пространство любого числа измерений. Пусть $n\in\mathbf{N}$, вектор $\bar z\in\mathbb{R}^n$ – вектор-столбец размера $n\times 1$, заданный своими координатами в некоторой системе координат. Линейным преобразованием $L[A]$, $\det A\neq 0$, называют оператор умножения на матрицу A:
$$L[A](\bar z) = A\bar z.$$
Если A_1, A_2 – две матрицы размера $n\times n$ с ненулевыми определителями, то композиции преобразований $L[A_2]\circ L[A_1]$ соответствует произведение матриц $A_2\cdot A_1$, композиции преобразований $L[A_1]\circ L[A_2]$ соответствует произведение $A_1\cdot A_2$. Тождественным преобразованием в этом примере является отображение $L[E]$, E – единичная матрица, обратным к $L[A]$ служит $L[A^{-1}]$. Одним из свойств линейного преобразования $L[A]$, $\det A\neq 0$, является то, что образом всякой линейно независимой системы векторов является опять же линейно независимая система: доказательство рассмотрим на примере трех линейно независимых векторов $\bar z_1$, $\bar z_2$, $\bar z_3$ из $\mathbb{R}^n$ (доказательство в общем случае с ним совпадает). Итак, надо проверить, что вектора $A\bar z_1$, $A\bar z_2$, $A\bar z_3$ из $\mathbb{R}^n$ линейно независимы. Предположим
$$c_1\,A(\bar z_1) + c_2\,A(\bar z_2) + c_3\,A(\bar z_3) = \bar 0.$$
Тогда
$$\bar 0 = L[A^{-1}](\bar 0) = L[A^{-1}](c_1\,A(\bar z_1) + c_2\,A(\bar z_2) + c_3\,A(\bar z_3)) = c_1\,\bar z_1 + c_2\,\bar z_2 + c_3\,\bar z_3.$$
Поэтому c_1, c_2, c_3 равны нулю и $A\bar z_2$, $A\bar z_3$ из $\mathbb{R}^n$ – линейно независимы. Вспоминая определение базиса получаем отсюда, что при линейном преобразовании $L[A]$ пространства $\mathbb{R}^n$ образом всякой базисной системы векторов является базисная система векторов.

Обобщением линейного преобразования $L[A]$ пространства $\mathbb{R}^n$ служит операция умножения на матрицу B размера $n\times n$ с произвольным определителем. Эту операцию как и выше будем обозначать $L[B]$:
$$L[B](\bar z) = B\bar z.$$
Пусть $L[A]$ – линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^n$, $L[B]$ – операция умножения на произвольную квадратную матрицу порядка n в пространстве $\mathbb{R}^n$. Обозначим
$$\bar u = L[B](\bar z) = B\bar z,\quad \bar v = L[A](\bar u) = A\bar u,\quad \bar w = L[A](\bar z) = A\bar z.$$
Тогда
$$\bar u = L[A^{-1}](\bar v) = A^{-1}\bar v,\quad \bar z = L[A^{-1}](\bar w) = A^{-1}\bar w.$$
Поэтому
$$L[A^{-1}](\bar v) = A^{-1}\bar v = B(A^{-1}\bar w),\quad \bar v = ABA^{-1}\bar w.$$

Полученная формула $\bar{v} = ABA^{-1}\bar{w}$ отражает правило изменения вида матрицы B, с помощью которой задается линейное отображение $L[B]$ при линейной замене переменной $\bar{u} \to A\bar{u}$. Это правило таково: $B \to ABA^{-1}$. Оно означает, что если $L[B]$ – оператор умножения на матрицу B в системе координат, связанной с $\bar{z}$, то в системе координат, связанной с $\bar{w}$, этот оператор является оператором умножения на матрицу ABA^{-1}.

Перейдем к рассмотрению понятия собственных векторов и собственных значений отображения $L[B]$. Вектор $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{z} \neq \bar{0}$ называют собственным вектором оператора $L[B]$, если $B(\bar{z}) = \lambda\bar{z}$, для некоторого λ. Число λ называют собственным значением оператора $L[B]$.

Определение 1. Определитель матрицы $(B - tE)$ называют характеристическим многочленом оператора $L[B]$.

Теорема 1. а) Характеристический многочлен $P(t)$ оператора $L[B]$ не зависит от выбора системы координат. б) Любое собственное значение оператора $L[B]$ является корнем $P(t)$ и обратно любой корень $P(t)$ является собственным значением оператора $L[B]$.

$\lhd$: Коротко доказательство а) является следствием такой выкладки:

$$|ABA^{-1} - tE| = |A(B - tE)A^{-1}| = |A||(B - tE)||A^{-1}| = |(B - tE)|.$$

б) если λ — корень $P(t)$, то определитель матрицы $(B - \lambda E)$ равен нулю, что означает существование ненулевого решения системы линейных уравнений $(B-\lambda E)\bar{z} = \bar{0}$. Это означает, что числу λ соответствует некоторый собственный вектор. Обратно:

$$B(\bar{z}) = \lambda\bar{z} \Rightarrow \quad (B - \lambda E)\bar{z} = \bar{0} \Rightarrow \quad |A - \lambda E| = 0. \ \rhd$$

Лемма 1. Собственные вектора оператора $L[B]$, соответствующие одному собственному значению λ, образуют векторное пространство.

$\lhd$: $B(\bar{z}_1 + c\,\bar{z}_2) = B(\bar{z}_1) + c\,B(\bar{z}_2) = \lambda\bar{z}_1 + c\,\lambda\bar{z}_2 = \lambda(\bar{z}_1 + c\,\bar{z}_2)$. $\rhd$

Лемма 2. Собственные вектора оператора $L[B]$, соответствующие разным собственным значениям, линейно независимы.

$\lhd$: Предположим $B(\bar{z}_1) = \lambda_1\bar{z}_1$, $B(\bar{z}_2) = \lambda_2\bar{z}_2$, $B(\bar{z}_3) = \lambda_3\bar{z}_3$, все λ — различные числа,

$$c_1\bar{z}_1 + c_2\bar{z}_2 + c_3\bar{z}_3 = \bar{0}$$

и, например, $c_1 \neq 0$. Тогда, применив оператор $L[B]$ к обеим частям этого равенства, получим

$$c_1\lambda_1\bar{z}_1 + c_2\lambda_2\bar{z}_2 + c_3\lambda_3\bar{z}_3 = \bar{0}, \quad c_1(\lambda_1 - \lambda_3)\bar{z}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_3)\bar{z}_2 = \bar{0}.$$

Таким образом, вектора $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$ пропорциональны — противоречие. Случай большего числа векторов рассматривается аналогично. $\rhd$

Таким образом, если оператор $L[B]$, заданный в n-мерном пространстве, имеет n различных собственных значений, то он имеет базис, состоящий из n собственных векторов. В этом базисе матрица ABA^{-1} оператора $L[B]$ имеет диагональный вид.

ЛЕКЦИЯ 2.5. *Квадратичные формы и их связь с симметричными матрицами. Свойства собственных векторов и собственных чисел симметричной матрицы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.*

Пусть

$$L[B](\bar{z}) = B\bar{z}, \quad \bar{z} \in \mathbb{R}^n$$

– матричное представление линейного отображения $L[B]$ пространства $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbf{N}$, в себя, связанное с некоторым базисом. Образом вектор-столбца $\bar{z}$ при этом отображении является вектор-столбец $B\bar{z}$. Умножим его слева на вектор-строку $\bar{z}^*$. В результате получим число $\bar{z}^*B\bar{z}$. Таким образом, каждому вектору $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$ мы можем сопоставить число

$$q(\bar{z}) = \bar{z}^*B\bar{z}.$$

Полученное соответствие $\bar{z} \to q(\bar{z})$ называют квадратичной формой на векторах $\bar{z}$. Примеры:

1) x_1^2 – квадратичная форма одного переменного (она же является квадратичной формой любого большего числа переменных), $B = (1)$,

2) $2x_1^2 - x_2^2$ – квадратичная форма двух переменных (она же является квадратичной формой любого большего числа переменных),

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

3) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 - 4x_1x_3$ – квадратичная форма трех переменных (она же является квадратичной формой любого большего числа переменных),

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

4) $2x_1x_2 + x_2x_3 - x_1x_3 + x_4^2$ – квадратичная форма четырех переменных (она же является квадратичной формой любого большего числа переменных),

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Представление любой квадратичной формы в виде $q(\bar z) = \bar z^* B \bar z$ вообще говоря неоднозначно: можно привести много примеров матриц T, для которых $\bar z^* B \bar z = \bar z^* T \bar z$. Так в примере 3 $q(\bar z) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 - 4x_1x_3 = x_1^2 + x_2^2 + 3/2x_1x_2 + 3/2x_2x_1 - 2x_1x_3 - 2x_3x_1$ и в качестве матрицы T можно выбрать

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -2 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, для примера 4 $q(\bar z) = x_1x_2 + x_2x_1 + 1/2x_2x_3 + 1/2x_3x_2 - 1/2x_1x_3 - 1/2x_3x_1 + x_4^2$,

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Среди всех таких представлений одно играет особую роль. Это представление, в котором матрица T является симметричной.

Определение. Матрица T называется симметричной, если $T = T^*$.

Теорема 1. Всякая квадратичная форма q может быть задана в виде $q(\bar z) = \bar z^* T \bar z$ с симметричной матрицей T; при этом матрица T по форме q определяется единственным образом.

$\lhd$: Пусть $q(\bar z) = \bar z^* B \bar z$. Тогда

$$q(\bar z) = (q(\bar z))^* = (\bar z^* B \bar z)^* = \bar z^* B^* \bar z.$$

Поэтому

$$q(\bar z) = \frac{1}{2}(q(\bar z) + (q(\bar z))^*) = \frac{1}{2}(\bar z^* B \bar z + \bar z^* B^* \bar z) = \bar z^* \cdot (B + B^*)/2 \cdot \bar z.$$

Возьмем $T = (B + B^*)/2$. Тогда $T = T^*$, что доказывает первую половину теоремы. Предположим $q(\bar z) = \bar z^* U \bar z$ еще одно представление формы q с симметричной матрицей U. Тогда

$$0 = (\bar z_1 + \bar z_2)^* \cdot (T - U) \cdot (\bar z_1 + \bar z_2) = \bar z_2^* \cdot (T - U) \cdot \bar z_1 + \bar z_1^* \cdot (T - U) \cdot \bar z_2 = 2\bar z_1^* \cdot (T - U) \cdot \bar z_2$$

из-за симметрии матрицы $T - U$. Если в этом равенстве взять $\bar z_1 = (T - U) \cdot \bar z_2$, то получится, что $(T - U) \cdot \bar z_2$ – нулевой вектор-столбец. Поэтому $T \cdot \bar z_2 = U \cdot \bar z_2$ при $\bar z_2 \in \mathbb{R}^n$. $\rhd$

Теорема 2. Собственные числа симметричной матрицы B являются действительными числами.

$\lhd$: Не вдаваясь в подробности реализации, лишь наметим способ, которым это утверждение может быть установлено. Предположим, $a + ib$ – комплексное собственное число матрицы B, a и b – его действительная и мнимая части, $\bar z_1 + i\bar z_2$ – собственный вектор, соответствующий $a + ib$, $\bar z_1$ и $\bar z_2$ – его действительная и мнимая компоненты:

$$B(\bar z_1 + i\bar z_2) = (a + ib)(\bar z_1 + i\bar z_2).$$

Тогда $B\bar z_1 = a\bar z_1 - b\bar z_2$, $B\bar z_2 = b\bar z_1 + a\bar z_2$,

$$B(\lambda \bar z_1 + \mu \bar z_2) = (a\lambda + b\mu)\bar z_1 + (-b\lambda + a\mu)\bar z_2. \tag{1}$$

Числа λ и μ можно воспринимать, как координаты векторов в плоскости, содержащей два вектора – $\bar z_1$ и $\bar z_2$. При этом $\bar z_1$ и $\bar z_2$ – ее базис. Действие оператора $L[B]$, согласно (1), состоит в изменении этих координат по правилу

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}.$$

Так как B – симметричная матрица, то и матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ должна быть симметричной, т. е. $b = 0$. $\rhd$

Теорема 3. Собственные вектора, соответствующие различным собственным значениям симметричной матрицы B взаимно ортогональны.

$\lhd$: Пусть λ_1, λ_2 – 2 различных собственных значения B, $\bar z_1$, $\bar z_2$ – им соответствующие собственные вектора. Тогда

$$\lambda_2(\bar z_1, \bar z_2) = \lambda_2 \bar z_1^* \cdot \bar z_2 = \bar z_1^* \cdot B \cdot \bar z_2 = (\bar z_1^* \cdot B \cdot \bar z_2)^* = \bar z_2^* \cdot B \cdot \bar z_1 = \lambda_1(\bar z_2, \bar z_1).$$

Сравнивая начало и конец полученного равенства, заключаем, что $(\bar z_1, \bar z_2) = 0$. $\triangleright$

Можно показать, что справедлива

Теорема 4. Для симметричной матрицы B порядка n имеется набор из n попарно ортогональных собственных векторов с вещественными характеристическими числами.

Выясним, как изменяется квадратичная форма q при линейных преобразованиях $L[A]$ пространства $\mathbb{R}^n$. Имеем $\bar w = L[A](\bar z)$ или

$$\bar w = A\bar z, \quad \bar z = A^{-1}\bar w,$$

и, значит, форма $q(\bar z) = \bar z^* B \bar z$ преобразуется в форму $q(\bar w) = (A^{-1}\bar w)^* B(A^{-1}\bar w)$. Таким образом, если в координатах, связанных с z, квадратичная форма q определялась матрицей B, то в координатах, связанных с w, она будет определяться матрицей $(A^{-1})^* \cdot B \cdot A^{-1}$.

Теорема 5. Всякая квадратичная форма q в некотором подходящем базисе может быть задана в виде $q(\bar z) = \bar z^* \cdot T \cdot \bar z$ с диагональной матрицей T. Такой вид задания называется каноническим (или диагональным) видом задания квадратичной формы.

$\triangleleft$: Доказательство проведем для случая $n = 3$, $\bar z = (x_1, x_2, x_3)^*$; общий случай рассматривается по аналогии. Пусть форма q определяется симметричной матрицей $B = (a_{i,j})$. Разберем два возможных варианта.

1) $a_{i,i} \neq 0$ хотя бы для одного $i \in \{1, 2, 3\}$. Пусть, скажем, $a_{1,1} \neq 0$. Имеем

$$q(\bar z) = a_{1,1}x_1^2 + 2x_1(a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3) + a_{2,2}x_2^2 + 2x_2a_{2,3}x_3 + a_{3,3}x_3^2.$$

В этом представлении выделим полный квадрат

$$q(\bar z) = a_{1,1}(x_1 + \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}x_2 + \frac{a_{1,3}}{a_{1,1}}x_3)^2 + g((x_2, x_3)),$$

обозначив $g((x_2, x_3))$ — оставшиеся после этого слагаемые. Они представляют из себя квадратичную форму на двумерных векторах (x_2, x_3). Вводим новые переменные $\bar y = (y_1, y_2, y_3)^*$ по правилу $y_1 = x_1 + a_{1,1}^{-1}(a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3)$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$. В этих переменных $q(\bar y) = a_{1,1}y_1^2 + g((y_2, y_3))$.

2) $a_{i,i} = 0$ для $i \in \{1, 2, 3\}$; если $q(x) = 0$ при всех x, то $q(x) = 0x_1^2 + 0x_2^2 + 0x_3^2$. Пусть $q(x) \neq 0$ при каком-либо x. Предположим, например, $a_{1,2} \neq 0$ и

$$q(x) = 2x_1a_{1,2}x_2 + 2x_1a_{1,3}x_3 + 2x_2a_{2,3}x_3.$$

Пусть $x_1 = y_1 + y_2$, $x_2 = y_1 - y_2$, $y_3 = x_3$. В новых переменных

$$q(y) = 2a_{1,2}(y_1^2 - y_2^2) + (2(y_1 + y_2)a_{1,3} + 2(y_1 - y_2)a_{2,3})y_3$$

квадратичная форма $q(y)$ содержит слагаемые с y_1^2, y_2^2 с ненулевыми коэффициентами. Поэтому к ней можно применить рассуждения варианта 1) и перейти к рассмотрению квадратичной формы с $n = 2$. $\triangleright$

ЛЕКЦИЯ 2.6. *Кривые второго порядка. Эллипс, гипербола и парабола, их свойства и канонические уравнения.*

Эллипсом называется геометрическое место точек, для которых сумма расстояний от двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина.

Для вывода уравнения эллипса будем считать, что его фокусы – F_1, F_2, расположены на оси Ox и имеют координаты $(-c, 0)^*$, $(c, 0)^*$ соответственно. Пусть M – произвольная точка эллипса. Тогда $F_1M + F_2M = const = 2a > 0$. Если $M = (x, y)^*$, то

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \tag{1}$$

Преобразуем это уравнение

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2, \tag{2}$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx, \tag{3}$$

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \tag{4}$$

Если обозначить $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ и учесть, что $a > c > 0$, то (4) можно записать в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{5}$$

Проверим, что (5) эквивалентно (1). Мы уже установили, что (1) $\Rightarrow$ (5). Докажем обратное. Если x, y удовлетворяют (5), то $|x| \leqslant a$ и $|cx| \leqslant a^2$. Поэтому выполнено (3) и (2),

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm(2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}).$$

Имеем, $|(x-c)^2+y^2| \leqslant x^2+2|cx|+c^2+y^2 \leqslant a^2+2a^2+c^2+b^2 = 4a^2$. Поэтому верно (1). Уравнение (5) называется каноническим уравнением эллипса. Таким образом, мы установили, что эллипс является линией второго порядка. Как следует из (5) эта линия симметрична относительно осей координат. Поэтому, чтобы изобразить эту линию на плоскости, достаточно нарисовать график функции $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant a$, и отразить его относительно осей координат. График этой функции – выпуклая вверх монотонно убывающая линия, проходящая через точки $(0,b)^*$, $(a,0)^*$. Производная в нуле равна нулю, производная в точке a равна минус бесконечности. На интервале $(0,a)$ эта функция является бесконечно дифференцируемой.

Оси симметрии эллипса называют его осями, их пересечение – центром эллипса. Точки, в которых эллипс пересекает свои оси, называются его вершинами, длины $2a$, $2b$ также иногда называют осями эллипса (большой и малой), а длины a, b – его полуосями. Величина $\varepsilon = c/a < 1$ называется эксцентриситетом эллипса. Он может быть найден по формуле

$$\varepsilon = \sqrt{1-(b/a)^2}.$$

С его помощью легко вычисляется расстояние между фокусами: $2c = 2\varepsilon a$.

Иногда оказывается полезным параметрическое представление эллипса:

$$x = a\cos t,\ \ y = b\sin t,\ \ t \in [0, 2\pi].$$

В его справедливости слушателям предлагается убедиться самим. Частным случаем эллипса является окружность радиуса a: $x^2+y^2=a^2$.

Другой линией второго порядка является гипербола. Рассмотрим набор фактов касающихся этой линии в том же объеме, как и для эллипса. При этом выяснится их полное, в определенном смысле, соответствие друг другу.

Гиперболой называется геометрическое место точек, для которых модуль разности расстояний от двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина. При этом требуется, чтобы эта разность была бы меньше расстояния между фокусами и не равнялась бы нулю.

Для вывода уравнения гиперболы будем считать, что его фокусы – F_1, F_2, расположены на оси Ox и имеют координаты $(-c,0)^*$, $(c,0)^*$ соответственно. Пусть M – произвольная точка гиперболы. Тогда $F_1M - F_2M = \pm 2a$. Если $M = (x,y)^*$, то

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a. \tag{6}$$

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2, \tag{7}$$

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = cx - a^2, \tag{8}$$

$$a^2(x^2-2cx+c^2+y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$

$$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2). \tag{9}$$

Если обозначить $b = \sqrt{c^2-a^2}$ и учесть, что $c > a > 0$, то (9) можно записать в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{10}$$

Также как и для эллипса, можно проверить, что (10) эквивалентно (6). Уравнение (10) называется каноническим уравнением гиперболы. Таким образом, мы установили, что гипербола является линией второго порядка. Как следует из (10) она симметрична относительно осей координат. Поэтому, чтобы изобразить эту линию, достаточно нарисовать график функции $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, $x \geqslant a$, и отразить его относительно осей координат. График этой функции – выпуклая вверх монотонно возрастающая линия, проходящая через точку $(a,0)^*$. Производная в точке a равна плюс бесконечности. На интервале (a,∞) эта функция является бесконечно дифференцируемой. Прямая $y = \frac{b}{a}x$ является асимптотой функции $y(x)$ при $x \to +\infty$.

Оси симметрии гиперболы называют его осями, их пересечение – центром гиперболы. Точки, в которых гипербола пересекает свои оси, называются его вершинами, длины $2a$, $2b$ также иногда называют осями гиперболы, а длины a, b – его полуосями. Величина $\varepsilon = c/a > 1$ называется эксцентриситетом гиперболы. Он может быть найден по формуле

$$\varepsilon = \sqrt{1+(b/a)^2}.$$

С его помощью легко вычисляется расстояние между фокусами: $2c = 2\varepsilon a$.

Иногда оказывается полезным параметрическое представление гиперболы:

$$x = \pm a \operatorname{ch} t,\ \ y = b \operatorname{sh} t,\ \ t \in \mathbb{R}.$$

В его справедливости слушателям предлагается убедиться самим.

Еще одной линией второго порядка является парабола. Так называется геометрическое место точек, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, равно расстояние до некоторой фиксированной прямой плоскости, называемой директрисой. При этом предполагается, что эта прямая не проходит через фокус.

Для вывода уравнения параболы будем считать, что его фокус F, и директриса имеют вид $F = (p/2, 0)^*$, $x = -p/2$ соответственно. Пусть $M = (x, y)^*$ – произвольная точка параболы. Тогда $FM = x + p/2$. Поэтому

$$\sqrt{(x - p/2)^2 + y^2} = x + p/2. \tag{11}$$

$$x^2 - px + p^2/4 + y^2 = x^2 + px + p^2/4, \tag{12}$$

$$y^2 = 2px, \tag{13}$$

Легко показать, что (13) эквивалентно (11). Уравнение (13) называется каноническим уравнением параболы. Как следует из (13) она симметрична относительно оси координат Ox. Поэтому, чтобы изобразить эту линию, достаточно нарисовать график функции $y = \sqrt{2px}$, $x \geqslant 0$, и отразить его относительно оси Ox. График этой функции – выпуклая вверх монотонно возрастающая линия, проходящая через точку $(0,0)^*$. Производная в точке 0 равна плюс бесконечности. На интервале $(0, \infty)$ эта функция является бесконечно дифференцируемой.

ЛЕКЦИЯ 2.7. *Приведение уравнения второго порядка к каноническому виду. Классификация кривых второго порядка на плоскости.*

Напоминание: *Пусть* $L[B](\bar{z}) = B\bar{z}, \quad \bar{z} \in \mathbb{R}^n$, *– матричное представление линейного отображения* $L[B]$ *пространства* $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbf{N}$, *в себя,* $q(\bar{z}) = \bar{z}^* B \bar{z}$ *– квадратичная форма на векторах* $\bar{z}$.

Теорема 1. *Всякая квадратичная форма* q *может быть задана в виде* $q(\bar{z}) = \bar{z}^* T \bar{z}$ *с симметричной матрицей* T.

Теорема 2. *Для симметричной матрицы* T *порядка* n *имеется набор из* n *попарно ортогональных собственных векторов с вещественными характеристическими числами.*

Правило, по которому изменяется квадратичная форма q *при линейных преобразованиях* $L[A]$ *пространства* $\mathbb{R}^n$ *таково: имеем* $\bar{w} = L[A](\bar{z})$ *или*

$$\bar{w} = A\bar{z}, \quad \bar{z} = A^{-1}\bar{w},$$

и, значит, форма $q(\bar{z}) = \bar{z}^* B \bar{z}$ *преобразуется в форму* $q(\bar{w}) = \bar{w}^*(A^{-1})^* B(A^{-1}\bar{w})$. *Таким образом, если в координатах, связанных с* z, *форма* q *определялась матрицей* B, *то в координатах, связанных с* w, *она будет определяться матрицей* $(A^{-1})^* \cdot B \cdot A^{-1}$.

Будем считать, что форма q задана симметричной матрицей T. Согласно теореме 2 для матрицы T имеется набор $\{\bar{z}_i\}_{i=1}^n$ собственных векторов T, образующих ортогональную систему:

$$(\bar{z}_i, \bar{z}_j) = \delta_i^j. \tag{1}$$

Пусть $\{z_{i,j}\}_{j=1}^n$ – координаты вектора $\bar{z}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Зададим пару матриц $Z = (z_{i,j})$ и $A = (a_{i,j}) = (z_{j,i}) = Z^*$. Тогда

$$A\bar{e}_k = (a_{1,k}, a_{2,k}, \ldots, a_{n,k})^* = \bar{z}_k,$$

т. е. $A\bar{e}_k = \bar{z}_k$. Кроме того,

$$A \cdot Z = (z_i^* \cdot z_j) = \big((z_i, z_j)\big) = E,$$

т. е. $A = Z^*$ и Z взаимно обратные матрицы. Матрицы, обладающие свойством $A^{-1} = A^*$, называются ортогональными. Каждая из них по своему определению имеет обратную A^* и, значит, задает линейное преобразование $L[A]$ пространства $\mathbb{R}^n$. Как было отмечено выше, в результате преобразований матрица T квадратичной формы изменяется по правилу

$$T \to (A^{-1})^* \cdot T \cdot A^{-1}. \tag{2}$$

При этом матрица остается симметричной:

$$\big((A^{-1})^* \cdot T \cdot A^{-1}\big)^* = (A^{-1})^* \cdot T^* \cdot ((A^{-1})^*)^* = (A^{-1})^* \cdot T \cdot A^{-1}.$$

Если $A^{-1} = A^*$, то (2) примет вид:

$$T \to A \cdot T \cdot A^*. \tag{3}$$

Прежде мы уже приводили форму q к диагональному виду путем линейной замены переменных. Проверим, как выглядит эта форма в базисе $\{\bar{z}_i\}_{i=1}^n$, т.е. после выполнения некоторого ортогонального преобразования. Пусть w_i – координаты вектора $\bar{w}$ относительно базиса $\{\bar{z}_i\}_{i=1}^n$:

$$\bar{w} = \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{z}_i.$$

Тогда

$$T\bar{w} = \sum_{i=1}^{n} w_i T\bar{z}_i = \sum_{i=1}^{n} w_i \lambda_i \bar{z}_i,$$

где λ_i – собственные значения матрицы T, соответствующие собственному вектору $\bar{z}_i$. Поэтому

$$\bar{w}^* T\bar{w} = \bar{w}^* \sum_{i=1}^{n} w_i \lambda_i \bar{z}_i = \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{z}_i^* \sum_{i=1}^{n} w_i \lambda_i \bar{z}_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i^2,$$

из-за (1). Значит, в координатах, связанных с базисом $\{\bar{z}_i\}_{i=1}^n$, форма q имеет диагональный вид, а матрица, ее задающая, также диагональна с собственными значениями λ_i на диагонали.

Согласно определениям общая кривая второго порядка имеет вид

$$\bar{z}^* T\bar{z} + (\bar{a}, \bar{z}) + b = 0,$$

T – симметричная матрица размера 2, $\bar{a}$ – двумерный вектор, b – число. Таким образом, кривая второго порядка путем параллельного переноса и поворота на некоторый угол может быть преобразовано к одному из 9 канонических видов.

нераспадающиеся линии:

– эллипсы $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$,
– гиперболы $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$,
– параболы $y^2 = 2px$,
– мнимые эллипсы $(x/a)^2 + (y/b)^2 = -1$,

распадающиеся линии:

– пара мнимых пересекающихся прямых $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 0$,
– пара действительных пересекающихся прямых $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 0$,
– пара действительных параллельных прямых $x^2 - a^2 = 0$,
– пара мнимых параллельных прямых $x^2 + a^2 = 0$,
– пара действительных совпадающих прямых $x^2 = 0$.

ЛЕКЦИЯ 2.8. *Поверхности второго порядка. Канонические уравнения основных поверхностей второго порядка: эллипсоиды, гиперболоиды и параболоиды. Понятие о классификации поверхностей второго порядка.*

Поверхности второго порядка задаются уравнениями

$$a_{1,1}x^2 + a_{2,2}y^2 + a_{3,3}z^2 + 2a_{1,2}xy + 2a_{1,3}xz + 2a_{2,3}yz + 2a_{1,4}x + 2a_{2,4}y + 2a_{3,4}z + a_{4,4} = 0.$$

Ее основными инвариантами (т.е. величинами, не зависящими от поворота и сдвига) являются $S = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ и

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \ \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix}.$$

Согласно определениям общая поверхность второго порядка имеет также вид

$$\bar{z}^* T\bar{z} + (\bar{a}, \bar{z}) + b = 0,$$

T – симметричная матрица размера 3, $\bar{a}$ – трехмерный вектор, b – число. Путем ортогонального преобразования и параллельного переноса она может быть приведена к одному из следующих 17 канонических видов:

нераспадающиеся поверхности:

Центральные поверхности $\delta \neq 0$

$\delta S > 0$, $T > 0$

– эллипсоид $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$, $\Delta < 0$,
– мнимый эллипсоид $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = -1$, $\Delta > 0$,
– мнимый конус $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 0$, $\Delta = 0$,

$\delta S \leqslant 0$ и (или) $T \leqslant 0$

– однополостный гиперболоид $(x/a)^2 + (y/b)^2 - (z/c)^2 = 1$, $\Delta > 0$,
– двуполостный гиперболоид $(x/a)^2 + (y/b)^2 - (z/c)^2 = -1$, $\Delta < 0$,
– действительный конус $(x/a)^2 + (y/b)^2 - (z/c)^2 = 0$, $\Delta = 0$,

Нецентральные поверхности $\delta = 0$

– эллиптический параболоид $x^2/p + y^2/q = 2z$, $\Delta < 0$,
– гиперболический параболоид $x^2/p - y^2/q = 2z$, $\Delta > 0$,

Цилиндрические и распадающиеся поверхности $\delta = 0$, $\Delta = 0$ (их вид определяется вычислением полуинвариантов – величин, не зависящих от поворота):

$T > 0$

– действительный эллиптический цилиндр $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$,
– мнимый эллиптический цилиндр $(x/a)^2 + (y/b)^2 = -1$,
– пара мнимых пересекающихся плоскостей $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 0$,

$T < 0$

– гиперболический цилиндр $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$,
– пара пересекающихся плоскостей $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 0$,

$T = 0$

– параболический цилиндр $y^2 = 2px$,
– пара мнимых параллельных плоскостей $x^2 + a^2 = 0$,
– пара действительных параллельных плоскостей $x^2 - a^2 = 0$,
– пара действительных совпадающих плоскостей $x^2 = 0$.