Государственный комитет Российской
Федерации по высшему образованию

Московский государственный авиационный
технологический университет им. К. Э. Циолковского

Кафедра “Высшая математика”

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ МНОГОЧЛЕНАМИ И ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Методические указания по курсу “Численные методы”

Составитель: Осипенко К. Ю.

Москва 1994

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем пособии излагаются основные классические методы аппроксимации функций многочленами и применение этих методов для задач численного дифференцирования. Функция — центральное понятие в математике. При практическом вычислении даже довольно простых функций (таких, например, как $\sin x$, $\cos x$, e^x) уже возникает вопрос: как их вычислять? Часто на практике значения функций бывают известны лишь в некотором числе точек. Как получить значения таких функций в промежуточных точках? В этих и других подобных задачах используется аппроксимация (приближение) изучаемых функций более простыми, как правило, многочленами.

Распространенной задачей является также задача приближенного вычисления производной функции, если она известна в некотором наборе точек. Соответствующие методы приближения, называемые формулами численного дифференцирования, могут быть получены с помощью многочленов, аппроксимирующих функцию.

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ МНОГОЧЛЕНАМИ

1. Многочлен Тейлора

Обозначим через $C[a,b]$ множество всех непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций. Через $C^n[a,b]$ будем обозначать множество функций, для которых $f^{(n)} \in C[a,b]$, т.е. функция f n раз дифференцируема и ее n-ая производная непрерывна на отрезке $[a,b]$.

Определение. Пусть $f \in C[a,b]$. *Многочленом Тейлора* функции f в точке $x_0 \in [a,b]$ степени n называется многочлен

$$P_n(x) = \sum_{k=o}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Пример 1.1. Найти многочлен Тейлора степени n для функции $f(x) = \sin x$ в нуле.

Решение. Нетрудно убедиться, что

$$f^{(2k-1)}(x) = (-1)^{k-1}\cos x, \qquad f^{(2k)} = (-1)^k \sin x, \quad k = 1, 2, \dots\ .$$

Поэтому для $n = 2k-1$ имеем

$$P_{2k-1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}.$$

Этот же многочлен является многочленом Тейлора и для $n = 2k$, так как $f^{(2k)}(0) = 0$.

Многочлен Тейлора степени n обладает тем замечательным свойством, что все его производные до порядка n включительно в точке x_0 совпадают с соответствующими производными функции f, т.е.

$$P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Это свойство легко проверить непосредственным дифференцированием $P_n(x)$.

Положим

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Величина $R_n(x)$ равна погрешности, возникающей при замене функции на ее многочлен Тейлора в точке x.

Из курса математического анализа известно, что, если $f \in C^{n+1}[a, b]$, то при всех $x \in [a, b]$ справедливо представление погрешности $R_n(x)$ в форме Лагранжа

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

где ξ некоторая точка, лежащая строго между x и x_0, если $x \neq x_0$.

Так как $f^{(n+1)}$ непрерывна на $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке. Положим

$$M_{n+1} = \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Тогда имеем для всех $x \in [a, b]$

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}. \tag{1.1}$$

Аппроксимация многочленами Тейлора (или, что то же, отрезками рядов Тейлора) используется, когда у функции легко вычисляются производные высших порядков, а остаточный член стремится к нулю при $n \to \infty$. Это прежде всего относится к элементарным функциям $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln(1 + x)$ и $\operatorname{arctg} x$. Напомним ряды Тейлора для этих функций:

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots, \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots, \\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \\
\ln(1 + x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots, \\
\operatorname{arctg} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\ .
\end{aligned}$$

Первые три ряда сходятся на всей числовой оси, а последний имеет радиус сходимости, равный единице.

Пример 2.1. Найти аппроксимацию функции $\sin x$ многочленом Тейлора, позволяющую вычислять эту функцию с погрешностью, не превосходящей 10^{-6}.

Решение. С помощью формул приведения задача сводится к вычислению $\sin x$ для $0 \le x < \dfrac{\pi}{2}$. Более того, в силу равенства

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

можно ограничиться отрезком $0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$, если с той же точностью построить аппроксимацию на этом же отрезке для функции $\cos x$.

Имеем (см. пример 1.1)

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1} + R^s_{2k}, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + R^c_{2k+1}. \end{aligned}$$

В силу того, что

$$\max_{x\in[0,\frac{\pi}{4}]} |\sin^{(2k+1)} x| = \max_{x\in[0,\frac{\pi}{4}]} |\cos^{(2k+2)} x| = \max_{x\in[0,\frac{\pi}{4}]} |\cos x| = 1,$$

получаем (см. (1.1))

$$\begin{aligned} |R^s_{2k}(x)| &\le \frac{1}{(2k+1)!}|x|^{2k+1} \le \frac{1}{(2k+1)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k+1}, \\ |R^c_{2k+1}(x)| &\le \frac{1}{(2k+2)!}|x|^{2k+2} \le \frac{1}{(2k+2)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k+2}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Обозначив через r_s и r_c правые части в (1.2), будем иметь:

k	0	1	2	3	4
r_s	$7,85 \cdot 10^{-1}$	$8,07 \cdot 10^{-2}$	$2,49 \cdot 10^{-3}$	$3,66 \cdot 10^{-5}$	$3,13 \cdot 10^{-7}$
r_c	$3,08 \cdot 10^{-1}$	$1,59 \cdot 10^{-2}$	$3,26 \cdot 10^{-4}$	$3,59 \cdot 10^{-6}$	$2,46 \cdot 10^{-8}$

Таким образом, для $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ получаем следующие аппроксимации

$$\begin{aligned} \sin x &\approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}, & |R^s_8(x)| &\le 3,13 \cdot 10^{-7}, \\ \cos x &\approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}, & |R^c_9(x)| &\le 2,46 \cdot 10^{-8}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

2. Вычисление значений многочлена. Схема Горнера

Рассмотрим многочлен степени n

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n.$$

Чтобы вычислить значения этого многочлена в точке a можно сначала найти с помощью $(n-1)$-го умножения $a, a^2, \dots, a^n$, а затем выполнить еще n умножений и n сложений. Общее число арифметических действий при таком алгоритме будет равно $3n-1$.

Однако существует более экономный способ вычисления многочлена, основанный на его представлении в виде

$$P_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \dots x(a_{n-2} + x(a_{n-1} + x a_n))\dots)).$$

Тогда вычисление $P_n(a)$ сводится к последовательному нахождению следующих величин

$$\begin{aligned} b_n &= a_n, \\ b_{n-1} &= a_{n-1} + ab_n, \\ b_{n-2} &= a_{n-2} + ab_{n-1}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_1 &= a_1 + ab_2, \\ b_0 &= a_0 + ab_1 = P_n(a). \end{aligned}$$

Этот способ называется *схемой Горнера.* Для реализации этого алгоритма требуется n умножений и n сложений, т.е. всего $2n$ арифметических действий. Можно доказать, что в общем случае не существует способа вычисления алгебраического многочлена n-ой степени менее, чем за $2n$ арифметических действий.

Отметим, что при вычислении на компьютере многочленов с большими коэффициентами по схеме Горнера может произойти значительная потеря точности за счет вычитания больших округленных чисел. Для некоторых специальных многочленов, рассматриваемых далее, предпочтительнее в смысле точности является применение рекуррентных соотношений, связывающих значения многочленов разных порядков.

Замечание. Если многочлен есть четная функция, т.е.

$$P_{2k}(x) = a_0 + a_2 x^2 + \dots + a_{2k}x^{2k},$$

то его удобно вычислять по формуле

$$P_{2k}(x) = a_0 + x^2(a_2 + \dots + x^2(a_{2k-2} + x^2 a_{2k})\dots).$$

Аналогично для многочлена нечетной степени

$$P_{2k+1}(x) = a_1 x + a_3 x^3 + \dots + a_{2k+1}x^{2k+1}$$

удобно пользоваться представлением

$$P_{2k+1}(x) = x(a_1 + x^2(a_3 + \dots + x^2(a_{2k-1} + x^2 a_{2k+1})\dots)).$$

Например, для аппроксимаций (1.3) имеем

$$\sin x \approx x\left(1 + x^2\left(-\frac{1}{3!} + x^2\left(\frac{1}{5!} - x^2\frac{1}{7!}\right)\right)\right),$$

$$\cos x \approx 1 + x^2\left(-\frac{1}{2!} + x^2\left(\frac{1}{4!} + x^2\left(-\frac{1}{6!} + x^2\frac{1}{8!}\right)\right)\right).$$

3. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Одной из распространенных задач на практике является следующая задача. Функция $f(x)$ известна в некоторой системе точек $x_0, x_1, \dots, x_n$, т.е. известны значения $f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Требуется найти приближенные значения функции в промежуточных точках.

Очевидно, что функций, принимающих в данных точках заданные значения, бесконечно много. Поэтому, чтобы задача была поставлена корректно, надо задать некоторую дополнительную информацию о том классе, которому принадлежит рассматриваемая функция, или фиксировать класс приближающих функций. Исторически первой была задача о нахождении функции наиболее простого вида, проходящей через заданные точки, например, многочлена наименьшей степени.

Теорема 3.1. *Существует единственный многочлен n-ой степени, удовлетворяющий условиям*

$$L_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n. \tag{3.1}$$

Доказательство. 1. Существование. Рассмотрим многочлены степени n

$$l_{nj}(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Имеем

$$l_{nj}(x_j) = 1, \qquad l_{nj}(x_i) = 0, \quad i \neq j. \tag{3.2}$$

Положим

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} l_{nj}(x) f(x_j). \tag{3.3}$$

В силу равенств (3.2) убеждаемся в справедливости (3.1).

2. Единственность. Пусть многочлен $\widetilde{L}_n(x)$ также удовлетворяет равенствам (3.1). Рассмотрим многочлен степени n

$$P_n(x) = L_n(x) - \widetilde{L}_n(x).$$

Имеем

$$P_n(x_i) = L_n(x_i) - \widetilde{L}_n(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

В силу основной теоремы алгебры число нулей всякого многочлена, отличного от тождественного нуля, не превосходит его степени. Следовательно, $P_n(x) \equiv 0$, т.е. $\widetilde{L}_n(x) \equiv L_n(x)$. Теорема доказана.

Определение. Многочлен, удовлетворяющий равенствам (3.1) называется *интерполяционным многочленом.*

Определение. Интерполяционный многочлен, записанный в виде (3.3) называется *интерполяционным многочленом Лагранжа.*

Многочлены l_{nj} могут быть записаны в несколько ином виде. Положим

$$\omega_n(x) = (x - x_0)\dots(x - x_n).$$

Тогда

$$(x - x_0)\dots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\dots(x - x_n) = \frac{\omega_n(x)}{x - x_j}.$$

Поскольку

$$\omega_n'(x_j) = (x_j - x_0)\dots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\dots(x_j - x_n),$$

то

$$l_{nj}(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_j)\omega_n'(x_j)}.$$

Тем самым интерполяционный многочлен Лагранжа может быть представлен в виде

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\omega_n(x)}{(x - x_j)\omega_n'(x_j)} f(x_j) = \omega_n(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{(x - x_j)\omega_n'(x_j)}. \tag{3.4}$$

Пример 3.1. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа по данным

x_i	-1	0	1	3
$f(x_i)$	1	2	1	0

и вычислить его значение при $x = 2$.

Решение. Из равенства (3.3)

$$L_3(x) = \frac{x(x-1)(x-3)}{-8} + \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{3}2 + \frac{(x+1)x(x-3)}{-4} = \frac{7}{24}x^3 - x^2 - \frac{7}{24}x + 2.$$

Следовательно, $L_3(2) = -\dfrac{1}{4}$.

4. Погрешность при интерполяции многочленом Лагранжа

Интерполяционный многочлен Лагранжа часто используется для приближенных вычислений исходной функции в промежуточных точках. Величина возникающей при такой замене погрешности может быть оценена с помощью следующей теоремы.

Теорема 4.1. *Пусть $f \in C^{n+1}[a, b]$. Тогда при всех $x \in [a, b]$ имеет место равенство*

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x), \tag{4.1}$$

где $\xi \in (a, b)$.

Доказательство. При $x = x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, равенство (4. 1) очевидно. Предположим, что $x \neq x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - K\omega_n(t),$$

где

$$K = \frac{f(x) - L_n(x)}{\omega_n(x)}.$$

Легко убедиться, что при таком выборе K $\varphi(x) = 0$. Кроме того, $\varphi(x_i) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Тем самым φ обращается в нуль в $n+2$ различных точках. По теореме Ролля φ' обращается в нуль по крайней мере в $n+1$ различной точке из интервала (a, b). Последовательно применяя теорему Ролля, получаем, что существует точка $\xi \in (a, b)$, для которой $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$. Таким образом,

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - K\omega^{(n+1)}(\xi) = 0 \tag{4.2}$$

(мы используем здесь тот факт, что $n+1$ производная от многочлена степени n тождественно равна нулю). Поскольку

$$\omega^{(n+1)}(t) \equiv (n+1)!,$$

то из (4.2) получаем

$$f^{(n+1)}(\xi) = K(n+1)!.$$

Выражая отсюда K, находим

$$\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(t).$$

Подставляя в последнее равенство $t = x$ и учитывая, что $\varphi(x) = 0$, получаем (4.1). Теорема доказана.

Следствие 4.1. *Пусть* $f \in C^{n+1}[a, b]$ *и*

$$M_{n+1} = \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|. \tag{4.3}$$

Тогда для всех $x \in [a, b]$

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_n(x)|.$$

Отсюда сразу же следует оценка

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{x \in [a,b]} |\omega_n(x)|. \tag{4.4}$$

Пример 4.1. В предположении, что $f \in C^4[-1, 3]$, оценить погрешность приближения $f(2) \approx -\dfrac{1}{4}$ из примера 3.1 через максимум модуля четвертой производной M_4.

Решение. Из следствия 4.1 получаем

$$|f(x) - L_3(x)| \leq \frac{M_4}{4!}|(x+1)x(x-1)(x-2)|.$$

Таким образом, подставляя $x = 2$, имеем

$$\left|f(2) + \frac{1}{4}\right| = |f(2) - L_3(2)| \leq \frac{M_4}{4}.$$

5. Интерполяция с равноотстоящими узлами

Пусть $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$, — узлы интерполяции и $h > 0$. Такие узлы называются *равноотстоящими узлами* или *равномерной сеткой*. При этом число h называется *шагом* сетки. При интерполяции по равномерной сетке удобно ввести новую переменную

$$q = \frac{x - x_0}{h}.$$

Тогда $x = x_0 + qh$ и, кроме того,

$$\begin{aligned} x - x_i &= x_0 + qh - (x_0 + ih) = h(q - i), \\ x_j - x_i &= h(j - i). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} l_{nj}(x_0 + qh) &= \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \prod_{i \neq j} \frac{q - i}{j - i} \\ &= \frac{q(q-1)\ldots(q-j+1)(q-j-1)\ldots(q-n)}{j(j-1)\ldots 2\cdot 1\cdot(-1)\cdot(-2)\ldots(j-n)} \\ &= (-1)^{n-j}\frac{q(q-1)\ldots(q-j+1)(q-j-1)\ldots(q-n)}{j!(n-j)!}. \end{aligned}$$

Следовательно, многочлен Лагранжа для равноотстоящих узлов может быть записан в виде

$$L_n(x_0 + qh) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \frac{q(q-1)\ldots(q-j+1)(q-j-1)\ldots(q-n)}{j!(n-j)!} f(x_j). \tag{5.1}$$

Пример 5.1. Написать многочлен Лагранжа второй степени для равноотстоящих узлов с шагом h.

Решение. При $n = 2$ из (5.1) находим

$$L_2(x_0 + qh) = \frac{(q-1)(q-2)}{2} f(x_0) - q(q-2) f(x_1) + \frac{q(q-1)}{2} f(x_2).$$

Оценим теперь погрешность, возникающую при замене функции на ее интерполяционный многочлен Лагранжа, когда значения функции заданы в равноотстоящих узлах. Для функции $\omega_n(x)$ имеем

$$\omega_n(x_0 + qh) = h^{n+1} q(q-1)\ldots(q-n).$$

Если $x \in [x_0, x_n]$, то $q \in [0, n]$. Положим

$$\Omega_n = \max_{q \in [0,n]} |q(q-1)\ldots(q-n)|.$$

Тогда из (4.4) получаем

$$\max_{x \in [x_0, x_n]} |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1} \Omega_n. \tag{5.2}$$

Значения Ω_n при $n = 1, 2, 3$ могут быть легко посчитаны:

$$\Omega_1 = \frac{1}{4}, \quad \Omega_2 = \frac{2\sqrt{3}}{9}, \quad \Omega_3 = 1. \tag{5.3}$$

Пример 5.2. С каким шагом надо затабулировать функцию $\sin x$, чтобы при использовании интерполяционного многочлена второй степени по ближайшим точкам погрешность аппроксимации не превосходила $0,5 \cdot 10^{-6}$?

Решение. Для $f(x) = \sin x$ $f'''(x) = -\cos x$. Поэтому $M_3 \leq 1$. Из (5.2) и (5.3) имеем

$$|f(x) - L_2(x)| \leq \frac{1}{3!}\frac{2\sqrt{3}}{9}h^3.$$

Таким образом, достаточно, чтобы шаг h удовлетворял неравенству

$$\frac{1}{3!}\frac{2\sqrt{3}}{9}h^3 \leq 0,5 \cdot 10^{-6}.$$

Отсюда

$$h \leq \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \cdot 10^{-2} \approx 1,37 \cdot 10^{-2}.$$

6. Минимизация оценки погрешности интерполяции. Многочлены Чебышева

Пусть имеется функция $f \in C^{n+1}[a,b]$ и известна величина M_{n+1} (см. (4.3)) или оценка этой величины. Как выбрать узлы на отрезке $[a,b]$, чтобы значение

$$\max_{x\in[a.b]} |\omega_n(x)|$$

было минимальным.

Рассмотрим для простоты случай, когда $[a,b] = [-1,1]$. Для этой задачи нам потребуются некоторые специальные многочлены.

Определение. *Многочленами Чебышева* называются многочлены, задаваемые на отрезке $[-1,1]$ равенством

(6.1) $$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Легко найти многочлены Чебышева для $n = 0, 1$ и 2. Действительно,

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= 1,\\
T_1(x) &= \cos(\arccos x) \quad = x,\\
T_2(x) &= \cos(2\arccos x) = 2\cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1.
\end{aligned}$$

Проверим, что функции, задаваемые формулой (6.1), действительно являются многочленами степени n. Из известных тригонометрических равенств находим

$$\cos(n+1)\varphi + \cos(n-1)\varphi = 2\cos\varphi\cos n\varphi.$$

Отсюда

$$\cos(n+1)\varphi = 2\cos\varphi\cos n\varphi - \cos(n-1)\varphi.$$

Полагая $\varphi = \arccos x$, получаем

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots . \tag{6.2}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} T_3(x) &= 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x &&= 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 2xT_3(x) - T_2(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) &&= 8x^4 - 8x^2 + 1 \end{aligned}$$

и т.д. Рекуррентная формула (6.2) является удобным и эффективным способом вычисления значений многочленов Чебышева.

Отметим ряд свойств многочленов Чебышева.

(1) Если n — четное, то $T_n(x)$ — четная функция, если n — нечетное, то $T_n(x)$ — нечетная функция.

(2) Для старшего коэффициента многочлена $T_n(x)$ справедливо равенство

$$a_n = 2^{n-1}.$$

(3) $T_n(x)$ имеет n различных действительных корней, лежащих в интервале $(-1, 1)$

$$x_i = \cos \frac{(2i-1)}{2n}\pi, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

(4)

$$\max_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| = 1,$$

причем максимум достигается в $n+1$ точке

$$x_i = \cos \frac{i\pi}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \tag{6.3}$$

Определение. Многочлен

$$\overline{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$$

называется *нормированным многочленом Чебышева* (у него старший коэффициент равен единице).

Теорема 6.1. *Для любого многочлена $P_n(x)$ степени n со старшим коэффициентом, равным единице, справедливо неравенство*

$$\max_{x \in [-1,1]} |P_n(x)| \geq \max_{x \in [-1,1]} |\overline{T}_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Доказательство. Предположим, что нашелся многочлен $P_n(x)$ со старшим коэффициентом, равным единице, для которого

$$\max_{x \in [-1,1]} |P_n(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Рассмотрим многочлен
$$R(x) = \overline{T}_n(x) - P_n(x).$$
В силу того, что у $\overline{T}_n(x)$ и $P_n(x)$ старшие коэффициенты равны единице, многочлен $R(x)$ имеет степень $n-1$. Для точек x_i, определенных равенствами (6.3), имеем

$$R(x_i) = \frac{(-1)^i}{2^{n-1}} - P_n(x_i) = (-1)^i \left(\frac{1}{2^{n-1}} - (-1)^i P_n(x_i) \right) = (-1)^i \varepsilon_i,$$

где $\varepsilon_i > 0$, $i = 0, 1, \dots, n$. Таким образом, у многочлена $R(x)$ на каждом из интервалов (x_{i-1}, x_i), $i = 1, \dots, n$, имеется хотя бы один нуль. Следовательно, у $R(x)$ по крайней мере n нулей, что невозможно, так как $R(x)$ многочлен степени $n-1$. Теорема доказана.

Благодаря свойству, доказанному в теореме 6.1, многочлены Чебышева называют *многочленами, наименее уклоняющимися от нуля.*

По доказанной теореме для любых точек $x_0, \dots, x_n$ из отрезка $[-1, 1]$ имеем

$$\max_{x \in [-1,1]} |\omega_n(x)| \geq \frac{1}{2^n}$$

(напомним, что $\omega_n(x)$ — многочлен степени $n+1$). С другой стороны, положив

$$x_i = \cos \frac{(2i+1)}{2(n+1)} \pi, \quad i = 0, 1, \dots, n, \tag{6.4}$$

будем иметь
$$\omega_n(x) = \overline{T}_{n+1}(x)$$
и, следовательно,
$$\max_{x \in [-1,1]} |\omega_n(x)| = \frac{1}{2^n}.$$
Таким образом, оценка (4.4) достигает своего минимума, когда в качестве узлов интерполяции выбраны нули многочлена Чебышева (*чебышевские узлы*). При этом она имеет вид

$$\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)! 2^n}. \tag{6.5}$$

В силу этого свойства узлы (6.4) называются *оптимальными узлами интерполяции.*

В случае интерполяции по чебышевским узлам многочлен Лагранжа можно упростить. Так как
$$\omega_n(x) = \overline{T}_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x),$$
то
$$\omega_n'(x) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}'(x) = \frac{(n+1)\sin((n+1)\arccos x)}{2^n \sqrt{1-x^2}}.$$
Поэтому
$$\omega_n'(x_i) = \frac{(n+1)\sin \dfrac{2i+1}{2}\pi}{2^n \sin \dfrac{(2i+1)}{2(n+1)}\pi} = (-1)^i \frac{n+1}{2^n \sin \dfrac{(2i+1)}{2(n+1)}\pi}.$$

Таким образом, из (3.4) получаем

$$L_n(x) = \frac{T_{n+1}(x)}{n+1} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{\sin \dfrac{(2i+1)}{2(n+1)}\pi}{x - x_i} f(x_i).$$

Случай интерполяции на произвольном отрезке $[a, b]$ можно свести к отрезку $[-1, 1]$ с помощью замены переменной

$$t = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}.$$

При этом оптимальные узлы интерполяции переходят в оптимальные узлы на отрезке $[a, b]$

$$t_i = \frac{b-a}{2} \cos \frac{2i+1}{2(n+1)}\pi + \frac{b+a}{2}, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

а оценка (4.4) будет иметь вид

$$\max_{t \in [a,b]} |f(t) - L_n(t)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}.$$

Для произвольного отрезка $[a, b]$ интерполяционный многочлен Лагранжа по оптимальным узлам запишется в виде

$$L_n(t) = \frac{b-a}{2} \frac{T_{n+1}\left(\dfrac{2t-a-b}{b-a}\right)}{n+1} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{\sin \dfrac{(2i+1)}{2(n+1)}\pi}{t - t_i} f(t_i).$$

7. Интерполяционный многочлен Ньютона

Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ — произвольные различные точки.

Определение. Число

$$f(x_i; x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

называется *разделенной разностью первого порядка.*

Очевидно, что $f(x_i; x_{i+1}) = f(x_{i+1}; x_i)$.

Определение. *Разделенной разностью n-го порядка* называется величина

$$f(x_i; x_{i+1}; \ldots; x_{i+n}) = \frac{f(x_{i+1}; \ldots; x_{i+n}) - f(x_i; x_{i+1}; \ldots; x_{i+n-1})}{x_{i+n} - x_i}.$$

При вычислении разделенные разности удобно записывать в виде следующей таблицы

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & f(x_0) & & & & \\
 & & f(x_0;x_1) & & & \\
x_1 & f(x_1) & & f(x_0;x_1;x_2) & & \\
 & & f(x_1;x_2) & & f(x_0;x_1;x_2;x_3) & \\
x_2 & f(x_2) & & f(x_1;x_2;x_3) & & f(x_0;x_1;x_2;x_3;x_4) \\
 & & f(x_2;x_3) & & f(x_1;x_2;x_3;x_4) & \\
x_3 & f(x_3) & & f(x_2;x_3;x_4) & & \\
 & & f(x_3;x_4) & & & \\
x_4 & f(x_4) & & & &
\end{array}$$

Лемма 7.1. *Имеет место равенство*

$$f(x_0;\dots;x_k)=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{\prod_{i\neq j}(x_j-x_i)}. \tag{7.1}$$

Доказательство. Легко проверить, что при $k=1$ это равенство совпадает с определением величины $f(x_0;x_1)$. Воспользуемся методом математической индукции. Предположим, что (7.1) доказано для всех $k\le l$. Тогда

$$f(x_0;\dots;x_{l+1})=\frac{f(x_1;\dots;x_{l+1})-f(x_0;\dots;x_l)}{x_{l+1}-x_0}$$
$$=\frac{1}{x_{l+1}-x_0}\left(\sum_{j=1}^{l+1}\frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{l+1}(x_j-x_i)}-\sum_{j=0}^{l}\frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{l}(x_j-x_i)}\right).$$

Пусть $j\neq 0,l+1$. Тогда коэффициент при $f(x_j)$ в правой части последнего равенства есть

$$\frac{1}{x_{l+1}-x_0}\left(\sum_{j=1}^{l+1}\frac{1}{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{l+1}(x_j-x_i)}-\sum_{j=0}^{l}\frac{1}{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{l}(x_j-x_i)}\right)$$
$$=\frac{(x_j-x_0)-(x_j-x_{l+1})}{(x_{l+1}-x_0)\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{l+1}(x_j-x_i)}=\frac{1}{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{l+1}(x_j-x_i)},$$

т.е. имеет требуемый вид. При $j=0$ или $l+1$ $f(x_j)$ входит только в одно слагаемое и нетрудно убедиться, что коэффициент при нем имеет также требуемый вид. Лемма доказана.

Из доказанной леммы вытекает, что разделенная разность есть симметрическая функция своих аргументов $x_0,\dots,x_k$, т.е. не меняется при любой их перестановке.

При помощи разделенных разностей можно получить другую форму записи интерполяционного многочлена.

Теорема 7.1. *Для интерполяционного многочлена справедливо представление*

$$L_n(x)=f(x_0)+f(x_0;x_1)(x-x_0)+\dots+f(x_0;x_1;\dots;x_n)(x-x_0)\dots(x-x_{n-1}). \tag{7.2}$$

Доказательство. Из равенств (3.4) и (7.1) имеем

$$f(x)-L_n(x)=f(x)-\omega_n(x)\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x_j)}{(x-x_j)\prod_{i\neq j}(x_j-x_i)} \tag{7.3}$$
$$=\omega_n(x)\left(\frac{f(x)}{\omega_n(x)}+\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x_j)}{(x_j-x)\prod_{i\neq j}(x_j-x_i)}\right).$$

Из леммы 7.1 следует, что выражение в скобках есть $f(x; x_0; \ldots; x_n)$. Таким образом,

$$f(x) - L_n(x) = f(x; x_0; \ldots; x_n)\omega_n(x).$$

Интерполяционный многочлен $L_n(x)$ можно представить в виде

$$L_n(x) = L_0(x) + (L_1(x) - L_0(x)) + \cdots + (L_n(x) - L_{n-1}(x)). \tag{7.4}$$

Разность $L_k(x) - L_{k-1}(x)$ есть многочлен степени k, который обращается в нуль в точках $x_0, \ldots, x_{k-1}$, так как

$$f(x_j) = L_k(x_j) = L_{k-1}(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Следовательно,

$$L_k(x) - L_{k-1}(x_k) = A_k(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1}) = A_k\omega_{k-1}(x). \tag{7.5}$$

Подставим в это равенство $x = x_k$ и воспользуемся тем, что $L_k(x_k) = f(x_k)$. Будем иметь

$$f(x_k) - L_{k-1}(x_k) = A_k\omega_{k-1}(x_k).$$

С другой стороны, подставим в (7.3) $x = x_k$ при $n = k - 1$, получаем

$$f(x_k) - L_{k-1}(x_k) = f(x_k; x_0; \ldots; x_{k-1})\omega_{k-1}(x_k).$$

Тем самым, учитывая свойство симметрии разделенных разностей, находим

$$A_k = f(x_0; x_1; \ldots; x_k).$$

Теперь утверждение теоремы вытекает из представления (7.4) и равенства (7.5). Теорема доказана.

Определение. Интерполяционный многочлен, записанный в виде (7.2) называется *интерполяционным многочленом Ньютона.*

Интерполяционный многочлен Ньютона имеет одно важное преимущество по сравнению с интерполяционным многочленом Лагранжа. Если к узлам интерполяции добавить еще одну точку x_{n+1}, то интерполяционный многочлен Лагранжа надо строить заново, а к интерполяционному многочлену Ньютона в силу равенства (см. (7.5))

$$L_{n+1}(x) = L_n(x) + f(x_0; x_1; \ldots; x_{n+1})(x - x_0)\ldots(x - x_n)$$

следует добавить лишь одно слагаемое. Тем не менее, ряд вычислений все же надо провести, чтобы найти разделенную разность $f(x_0; x_1; \ldots; x_{n+1})$.

8. Интерполяционный многочлен Ньютона для равноотстоящих узлов

Пусть $x_i = x_0 + ih$ — равномерная сетка с шагом h и $f_i = f(x_i)$.

Определение. *Конечной разностью первого порядка* функции f в точке x_i называется величина

$$\Delta f_i = f(x_i + h) - f(x_i) = f_{i+1} - f_i.$$

Конечной разностью n-го порядка функции f в точке x_i называется величина

$$\Delta^n f_i = \Delta(\Delta^{n-1} f_i) = \Delta^{n-1} f_{i+1} - \Delta^{n-1} f_i.$$

Например,

$$\Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i.$$

При вычислении конечные разности удобно располагать в таблицу

$$\begin{array}{cccccc}
x_0 & f_0 & & & & \\
 & & \Delta f_0 & & & \\
x_1 & f_1 & & \Delta^2 f_0 & & \\
 & & \Delta f_1 & & \Delta^3 f_0 & \\
x_2 & f_2 & & \Delta^2 f_1 & & \Delta^4 f_0 \\
 & & \Delta f_2 & & \Delta^3 f_1 & \\
x_3 & f_3 & & \Delta^2 f_2 & & \\
 & & \Delta f_3 & & & \\
x_4 & f_4 & & & &
\end{array}$$

Лемма 8.1. *Для равномерной сетки $x_i = x_0 + ih$ имеет место равенство*

$$f(x_0; x_1; \ldots; x_n) = \frac{\Delta^n f_0}{n! h^n}. \tag{8.1}$$

Доказательство. Будем доказывать это равенство по индукции. При $n = 1$ получаем

$$f(x_0; x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f_1 - f_0}{h} = \frac{\Delta f_0}{h}.$$

Пусть равенство (8.1) доказано для $n - 1$. Докажем его для n. Имеем

$$f(x_0; x_1; \ldots; x_n) = \frac{f(x_1; \ldots; x_n) - f(x_0; \ldots; x_{n-1})}{x_n - x_0}$$
$$= \frac{1}{nh}\left(\frac{\Delta^{n-1} f_1}{(n-1)! h^{n-1}} - \frac{\Delta^{n-1} f_0}{(n-1)! h^{n-1}}\right) = \frac{\Delta^n f_0}{n! h^n}.$$

Лемма доказана.

Пусть имеется равномерная сетка $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Введем переменную

$$q = \frac{x - x_0}{h}.$$

Тогда $x - x_i = h(q - i)$ и в силу леммы 8.1 для интерполяционного многочлена Ньютона (см. (7.2)) получаем представление

$$L_n(x_0 + qh) = f_0 + q\Delta f_0 + q(q-1)\frac{\Delta^2 f_0}{2!} + \cdots + q(q-1)\ldots(q-n+1)\frac{\Delta^n f_0}{n!}. \tag{8.2}$$

Этот многочлен называется интерполяционным многочленом Ньютона для *интерполяции вперед*. Им удобно пользоваться для x близких к x_0.

Можно рассматривать сетку, идущую влево от точки x_0

$$x_{-i} = x_0 - ih, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Тогда аналогично равенству (8.1) получаем

$$f(x_0; x_{-1}; \ldots; x_{-k}) = \frac{\Delta^k f_{-k}}{k!h^k}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, для интерполяционного многочлена Ньютона

$$L_n(x) = f(x_0) + f(x_0; x_{-1})(x - x_0) + \ldots \\ + f(x_0; x_{-1}; \ldots; x_{-n})(x - x_0)(x - x_{-1}) \ldots (x - x_{-n+1})$$

имеем представление

$$L_n(x_0 + qh) = f_0 + q\Delta f_{-1} + q(q+1)\frac{\Delta^2 f_{-2}}{2!} + \cdots + q(q+1)\ldots(q+n-1)\frac{\Delta^n f_{-n}}{n!}. \tag{8.3}$$

Этот многочлен называется интерполяционным многочленом Ньютона для *интерполяции назад*. Он используется для интерполяции в конце таблицы. При этом конечные разности удобно получать, пользуясь таблицей

$$\begin{array}{cccccc}
x_{-4} & f_{-4} & & & & \\
 & & \Delta f_{-4} & & & \\
x_{-3} & f_{-3} & & \Delta^2 f_{-4} & & \\
 & & \Delta f_{-3} & & \Delta^3 f_{-4} & \\
x_{-2} & f_{-2} & & \Delta^2 f_{-3} & & \Delta^4 f_{-4} \\
 & & \Delta f_{-2} & & \Delta^3 f_{-3} & \\
x_{-1} & f_{-1} & & \Delta^2 f_{-2} & & \\
 & & \Delta f_{-1} & & & \\
x_0 & f_0 & & & &
\end{array}$$

Пример 8.1. Пусть задана таблица для функции $f(x) = \sin x$ и ее конечных разностей

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
5°	$0,08716$				
		8649			
10°	$0,17365$		-132		
		8517		-65	
15°	$0,25882$		-197		2
		8320		-63	
20°	$0,34202$		-260		
		8060			
25°	$0,42262$				

Найти приближенные значения $\sin 8^\circ$ и $\sin 22^\circ$ с помощью интерполяционных многочленов Ньютона 1, 2, 3 и 4-ой степеней.

Решение. Найдем сначала приближенное значение $\sin 8^\circ$. У нас заданы значения синуса в равномерной сетке $x_i = x_0 + ih$, где $x_0 = h = 5^\circ$. Поскольку

$$q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{8^\circ - 5^\circ}{5^\circ} = 0,6,$$

то

$$\begin{aligned}
L_1(x_0+qh) &= f_0 + q\Delta f_0 && = 0,139054,\\
L_2(x_0+qh) &= L_1(x_0+qh) + q(q-1)\frac{\Delta^2 f_0}{2!} && = 0,139212,\\
L_3(x_0+qh) &= L_2(x_0+qh) + q(q-1)(q-2)\frac{\Delta^3 f_0}{3!} && = 0,139176,\\
L_4(x_0+qh) &= L_3(x_0+qh) + q(q-1)(q-2)(q-3)\frac{\Delta^4 f_0}{4!} && = 0,139175.
\end{aligned}$$

В силу того, что $\sin 8^\circ = 0,13917309\ldots$, для погрешностей полученных приближений справедливы равенства

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= 1,19\cdot 10^{-4},\\
\varepsilon_2 &= 3,89\cdot 10^{-5},\\
\varepsilon_3 &= 2,91\cdot 10^{-6},\\
\varepsilon_4 &= 1,91\cdot 10^{-6}.
\end{aligned}$$

Найдем теперь приближенное значение $\sin 22^\circ$. Для этого воспользуемся интерполяционным многочленом Ньютона для интерполяции назад. Положим $x_0 = 25^\circ$, $h = 5^\circ$ и $x_{-i} = x_0 - ih$, $i = 0, 1, \ldots, 4$. Тогда

$$q = \frac{x - x_0}{h} = -0,6.$$

Аналогично предыдущему случаю получаем

$$\begin{aligned}
L_1(x_0+qh) &= f_0 + q\Delta f_{-1} && = 0,374260,\\
L_2(x_0+qh) &= L_1(x_0+qh) + q(q+1)\frac{\Delta^2 f_{-1}}{2!} && = 0,37745772,\\
L_3(x_0+qh) &= L_2(x_0+qh) + q(q+1)(q+2)\frac{\Delta^3 f_{-1}}{3!} && = 0,37460728,\\
L_4(x_0+qh) &= L_3(x_0+qh) + q(q+1)(q+2)(q+3)\frac{\Delta^4 f_{-1}}{4!} && = 0,374606608.
\end{aligned}$$

Для сравнения приведем значение $\sin 22^\circ$ с точностью до девяти знаков

$$\sin 22^\circ = 0,374606593.$$

Тем самым для погрешности полученных приближений справедливы равенства

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= 3,47\cdot 10^{-4},\\
\varepsilon_2 &= 3,46\cdot 10^{-5},\\
\varepsilon_3 &= 6,87\cdot 10^{-7},\\
\varepsilon_4 &= 1,46\cdot 10^{-8}.
\end{aligned}$$

ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

9. Формулы численного дифференцирования, получаемые с помощью формулы Тейлора

Напомним, что производной функции $f(x)$ в точке x называется величина

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to x} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Если производную не удается вычислить точно или это слишком сложно сделать, то пользуются приближенными формулами, использующими значения функции в некоторых точках. Эти формулы называются *формулами численного дифференцирования.* Например,

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Оценим погрешность этой простейшей формулы численного дифференцирования. Обычно для оценки погрешности предполагается существование у функции некоторых производных более высокого порядка, чем искомая производная. Рассмотрим равномерную сетку с шагом $h > 0$ $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, \pm 1, \dots$. Положим $f_i = f(x_i)$ и $f_i' = f'(x_i)$. Если $f \in C^2[x_0, x_1]$, то по формуле Тейлора

$$f_1 = f_0 + f_0'(x_1 - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x_1 - x_0)^2,$$

где $\xi \in (x_0, x_1)$. Отсюда, учитывая, что $x_1 - x_0 = h$, находим

$$f_0' = \frac{f_1 - f_0}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Таким образом,

$$\left| f_0' - \frac{f_1 - f_0}{h} \right| \le \frac{M_2}{2}h. \tag{9.1}$$

Итак, мы получили одну из простейших формул численного дифференцирования

$$f_0' \approx \frac{f_1 - f_0}{h} \tag{9.2}$$

с оценкой погрешности (9.1).

Пусть теперь $f \in C^2[x_{-1}, x_1]$. Тогда по формуле Тейлора

$$f_1 = f_0 + f_0'h + \frac{f_0''}{2!}h^2 + \frac{f'''(\xi_1)}{3!}h^3,$$
$$f_{-1} = f_0 - f_0'h + \frac{f_0''}{2!}h^2 - \frac{f'''(\xi_2)}{3!}h^3,$$

где $\xi_1, \xi_2 \in (x_{-1}, x_1)$. Вычитая из первого равенства второе, находим

$$f_1 - f_{-1} = 2f_0'h + \frac{h^3}{6}(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)).$$

Отсюда

$$f_0' = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} - \frac{h^2}{12}(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)).$$

Следовательно,

$$\left| f_0' - \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} \right| \leq \frac{h^2}{6} M_3. \tag{9.3}$$

Тем самым получена еще одна формула численного дифференцирования

$$f_0' \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} \tag{9.4}$$

с оценкой погрешности (9.3).

Пусть, наконец, $f \in C^4[x_{-1}, x_1]$. Тогда

$$f_1 = f_0 + f_0'h + \frac{f_0''}{2!}h^2 + \frac{f_0'''}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!}h^4,$$
$$f_{-1} = f_0 - f_0'h + \frac{f_0''}{2!}h^2 - \frac{f_0'''}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_2)}{4!}h^4.$$

Сложив эти равенства, находим

$$f_1 - 2f_0 + f_{-1} = f_0''h^2 + \frac{h^4}{4!}(f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)).$$

Отсюда

$$f_0'' = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} - \frac{h^2}{24}(f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)).$$

Следовательно,

$$f_0'' \approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}. \tag{9.5}$$

При этом для погрешности этой формулы численного дифференцирования справедлива оценка

$$\left| f_0'' - \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} \right| \leq \frac{h^2}{12} M_4. \tag{9.6}$$

10. Оптимальный выбор шага

Из оценок погрешностей (9.1), (9.3) и (9.6) вытекает, что выбирая достаточно малое значение шага h, можно сколь угодно точно вычислить значение производных. Однако при практическом вычислении производных с помощью формул численного дифференцирования шаг не берется слишком маленьким. Связано это с тем, что реально значения функций всегда известны с некоторой погрешностью.

Рассмотрим для примера вычисление производной по формуле (9.2), в которой вместо точных значений f_0 и f_1 используются приближенные значения

$$\widetilde{f}_0 = f_0 + \delta_0, \qquad \widetilde{f}_1 = f_1 + \delta_1.$$

Предположим, что $|\delta_0| \leq \delta$ и $|\delta_1| \leq \delta$ (в этом случае говорят, что значения функции *вычислены с погрешностью* δ). Тогда в качестве приближения к f_0' мы вычисляем

$$f_0' \approx \frac{\widetilde{f}_1 - \widetilde{f}_0}{h} = \frac{f_1 - f_0}{h} + \frac{\delta_1 - \delta_0}{h}.$$

Для погрешности такого приближения имеем оценку

$$\left| f_0' - \frac{\widetilde{f}_1 - \widetilde{f}_0}{h} \right| \leq \left| f_0' - \frac{f_1 - f_0}{h} \right| + \left| \frac{\delta_1 - \delta_0}{h} \right| \leq \frac{M_2}{2} h + \frac{2\delta}{h} = \varphi(h).$$

При каком шаге h оценка такого приближения будет минимальной? Поскольку

$$\varphi'(h) = \frac{M_2}{2} - \frac{2\delta}{h^2},$$

то легко убедиться, что функция $\varphi(h)$ при $h > 0$ имеет единственный минимум

$$h_0 = 2\sqrt{\frac{\delta}{M_2}}.$$

Этот шаг является оптимальным для формулы (9.1) при вычислении функции с погрешностью δ.

Задача. Найти оптимальный шаг для формул (9.4) и (9.5).

11. Формулы численного дифференцирования, получаемые с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа

Один из универсальных способов построения формул численного дифференцирования состоит в том, что по значениям функции f в некоторых узлах $x_0, x_1, \dots, x_n$ строят интерполяционный многочлен Лагранжа $L_n(x)$ и приближенно полагают

$$f^{(m)}(x) \approx L_n^{(m)}(x).$$

Наиболее часто встречается случай, когда узлы распределены равномерно: $x_i = x_0 + ih$, $h > 0$. Будем по-прежнему пользоваться обозначением $f_i = f(x_i)$. Тогда (см. (5.1))

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \frac{q(q-1)\dots(q-i+1)(q-i-1)\dots(q-n)}{i!(n-i)!} f_i,$$

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1} \Omega_n(q),$$

где

$$x = x_0 + qh, \qquad \Omega_n(q) = q(q-1)\dots(q-n).$$

Поскольку $\dfrac{dq}{dx} = \dfrac{1}{h}$, то $\dfrac{d}{dx} = \dfrac{1}{h}\dfrac{d}{dq}$ и

$$f'(x) \approx L_n'(x)$$
$$= \frac{1}{h}\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\frac{d}{dq}\left(q(q-1)\dots(q-i+1)(q-i-1)\dots(q-n)\right) f_i.$$

Оценим погрешность такого приближения. Имеем

$$f'(x) - L_n'(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left(\Omega_n(q)\frac{d}{dx}f^{(n+1)}(\xi) + f^{(n+1)}(\xi)\frac{1}{h}\frac{d}{dq}\Omega_n(q)\right).$$

В случае, когда оценивается погрешность приближенного вычисления производной в узле x_i, $q = i$ и $\Omega_n(q) = 0$. Следовательно,

$$f'(x_i) - L_n'(x_i) = \frac{h^n}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\frac{d}{dq}\Omega_n(q)\Big|_{q=i}.$$

Отсюда, положив $f_i' = f'(x_i)$, получаем

$$|f_i' - L_n'(x_i)| \le \frac{M_{n+1}h^n}{(n+1)!}\frac{d}{dq}\Omega_n(q)\Big|_{q=i}. \tag{11.1}$$

Примеры. При $n = 2$ (см. пример 5.1) имеем

$$L_2(x_0 + qh) = \frac{(q-1)(q-2)}{2}f_0 - q(q-2)f_1 + \frac{q(q-1)}{2}f_2.$$

Тем самым

$$f'(x_0 + qh) \approx L_2'(x_0 + qh) = \frac{(2q-3)f_0 - 4(q-1)f_1 + (2q-1)f_2}{2h}.$$

Учитывая (11.1) и то, что $\Omega_2(q) = q(q-1)(q-2)$, получаем:

(1) $q = 0$
$$\left|f_0' - \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h}\right| \le \frac{h^2}{3}M_3.$$

(2) $q = 1$
$$\left|f_1' - \frac{f_2 - f_0}{2h}\right| \le \frac{h^2}{6}M_3.$$

Отметим, что эта формула численного дифференцирования уже была получена с помощью формулы Тейлора (см. (9.3)).

(3) $q = 2$
$$\left|f_2' - \frac{f_0 - 4f_1 + 3f_2}{2h}\right| \le \frac{h^2}{3}M_3.$$

Для второй производной имеем

$$f''(x_0+qh) \approx L_2''(x_0+qh) = \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{h^2}.$$

Эта формула численного дифференцирования (и ее оценка) была также получена с помощью формулы Тейлора (см. (9.5)).

Пусть теперь $n = 3$. Тогда

$$L_3(x_0+qh) = -\frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6} f_0 + \frac{q(q-2)(q-3)}{2} f_1 \\ - \frac{q(q-1)(q-3)}{2} f_2 + \frac{q(q-1)(q-2)}{6} f_3.$$

Таким образом,

$$f'(x_0+qh) \approx L_3'(x_0+qh) = -\frac{3q^2-12q+11}{6h} f_0 + \frac{3q^2-10q+6}{2h} f_1 \\ - \frac{3q^2-8q+3}{2h} f_2 + \frac{3q^2-6q+2}{6h} f_3.$$

Отсюда получаем следующие формулы численного дифференцирования:

(1) $q = 0$

$$f_0' \approx \frac{-11f_0 + 18f_1 - 9f_2 + 2f_3}{6h};$$

(2) $q = 1$

$$f_1' \approx \frac{-2f_0 - 3f_1 + 6f_2 - f_3}{6h};$$

(3) $q = 2$

$$f_2' \approx \frac{f_0 - 6f_1 + 3f_2 + 2f_3}{6h};$$

(4) $q = 3$

$$f_3' \approx \frac{-2f_0 + 9f_1 - 18f_2 + 11f_3}{6h}.$$

Задача. Для случаев (1)–(4) оценить погрешность формул численного дифференцирования.

12. Применение интерполяционного многочлена Ньютона для построения формул численного дифференцирования

В п.7 мы говорили об удобствах, связанных с применением интерполяционного многочлена Ньютона. Пользуясь этим многочленом, можно получать формулы численного дифференцирования, содержащие разделенные разности или конечные разности.

Пусть имеется равномерная сетка $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \ldots$. Тогда (см. (8.2))

$$L_n(x_0+qh) = f_0 + q\Delta f_0 + q(q-1)\frac{\Delta^2 f_0}{2!} + \cdots + q(q-1)\ldots(q-n+1)\frac{\Delta^n f_0}{n!}.$$

Так как $\dfrac{d}{dx} = \dfrac{1}{h}\dfrac{d}{dq}$, то

$$f'(x_0+qh) \approx L_n'(x_0+qh) = \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 + (2q-1)\frac{\Delta^2 f_0}{2!}\right.$$
$$\left. +(3q^2-6q+2)\frac{\Delta^3 f_0}{3!} + \dots + \frac{d}{dq}(q(q-1)\dots(q-n+1))\frac{\Delta^n f_0}{n!}\right).$$

Этой формулой удобно пользоваться при малых q, т.е. в начале таблицы. Аналогичную формулу можно получить, исходя из интерполяционного многочлена Ньютона для интерполяции назад (см. (8.3))

$$f'(x_0+qh) \approx L_n'(x_0+qh) = \frac{1}{h}\left(\Delta f_{-1} + (2q+1)\frac{\Delta^2 f_{-2}}{2!}\right.$$
$$\left. +(3q^2+6q+2)\frac{\Delta^3 f_{-3}}{3!} + \dots + \frac{d}{dq}(q(q+1)\dots(q+n-1))\frac{\Delta^n f_{-n}}{n!}\right),$$

которой удобно пользоваться в конце таблицы.

Таким же образом можно получать формулы численного дифференцирования и для старших производных. Например,

$$f''(x_0+qh) \approx L_n''(x_0+qh) = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 f_0 + (q-1)\Delta^3 f_0 + \dots\right.$$
$$\left. +\frac{d^2}{dq^2}(q(q-1)\dots(q-n+1))\frac{\Delta^n f_0}{n!}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н.С. *Численные методы.* М.: Наука, 1973.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы.* М.: Наука, 1987.
3. Березин И.С., Жидков Н.П. *Методы вычислений.* М.: Наука, 1966. Т.1; Физматгиз, 1962. Т.2.
4. Волков Е.А. *Численные методы.* М.: Наука, 1982.
5. Демидович Б.П., Марон И.А. *Основы вычислительной математики.* М.: Наука, 1966.
6. Калиткин Н.Н. *Численные методы.* М.: Наука, 1978.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Осипенко Константин Юрьевич

Аппроксимация функций многочленами и численное дифференцирование

Методические указания по курсу "Численные методы"

Редактор М. А. Соколова

Подп. в печать Объем п.л. Тираж 75 экз. Заказ N

Ротапринт МГАТУ. Берниковская наб., 14