МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)

Кафедра "Высшая математика"

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Составитель: Данилина И.А.

Содержание

1 Введение **2**

2 Решение задач Коши с помощью формулы Тейлора **3**

3 Метод Эйлера **6**

4 Метод Эйлера с пересчетом. **9**

5 Методы Рунге-Кутта **12**

1 Введение

Уравнение

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

связывающее неизвестную функцию $y(x)$, независимую переменную x и производные $y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)$ неизвестной функции, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением.*

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной.

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка называется функция $y = f(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$, зависящая от n постоянных которая после подстановки в уравнение, превращает его в тождество. В процессе решения дифференциального уравнения нередко получается соотношение вида $\Phi(x.y, C_1, C_2, \cdots, C_n) = 0$. Выразить y из этого соотношения в элементарных функциях не всегда оказывается возможным. В таких случаях общее решение оставляют в неявном виде и называют *общим интегралом* дифференциального уравнения.

В *задаче Коши* для дифференциального уравнения n-го порядка искомая функция $y(x)$, кроме самого дифференциального уравнения, должна удовлетворять заданным начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Методы, с помощью которых решение можно выразить через элементарные функции или интегралы от элементарных функций, известны только для некоторых классов дифференциальных уравнений (уравнения с разделяющимися переменными, линейные дифференциальные уравнения и др.).Тем самым на практике часто возникает необходимость приближенного решения задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Эта работа посвящена описанию некоторых методов решения таких задач, исследованию свойст этих методов и оценке их погрешностей.

2 Решение задач Коши с помощью формулы Тейлора

Один из приближенных методов решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения основан на применении формулы Тейлора.

Пусть, например, требуется найти решение дифференциального уравнения

$$y' = F(x, y), \tag{1}$$

удовлетворяющее начальному условию.

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Допустим, что решение существует и представимо в виде ряда Тейлора

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \tag{3}$$

Тогда сумма конечного числа членов этого ряда будет приближенно равняться искомому частному решению. Для того чтобы выписать ряд Тейлора нужно найти найти значения производных $y'(x), \quad y''(x), \quad y'''(x), \cdots$ в точке x_0. Это можно сделать при помощи уравнения (1) и условия (2).

Дифференцируя (1) по x получим соотношения

$$\begin{aligned} y'' &= F'_x(x, y) + F'_y(x, y)y', \\ y''' &= F''_{xx}(x, y) + 2F''_{xy}(x, y)y' + F''_{yy}(x, y)y'^2 + F_y(x, y)y'', \ldots \end{aligned} \tag{4}$$

Подставляя $x = x_0$ и $y = y_0$ в предыдущие соотношения последовательно, будем знать значения

$$y'(x_0), \qquad y''(x_0), \qquad y'''(x_0), \ldots \tag{5}$$

Таким образом, можно написать приближенное равенство

$$y(x) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{y^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i. \tag{6}$$

Для тех значений x, для которых ряд Тейлора сходится, формула (6) представляет приближенное решение рассматриваемой задачи.

Пример

Найти приближенно частное решение дифференциального уравнения

$$y'' = xyy',$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1,$$

в виде четырех первых отличных от нуля членов ряда Тейлора.

Решение

В условиях задачи $x_0 = 0$, поэтому общая формула ряда Тейлора трансформируется в частный случай разложения в ряд Маклорена:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

Надо отметить, что в практических заданиях чаще встречается именно этот, более компактный ряд.

Значения самой функции и ее производной в нуле известны из условия задачи. Для того чтобы вычислить $y''(0)$ в правую часть исходного уравнения $y'' = xyy'$ подставим $x = 0$, $y = 1$, $y' = 1$:

$$y''(0) = 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0.$$

Вычислим производную третьего порядка. Сначала продифференцируем начальное уравнение:

$$y''' = (xyy')' = yy' + xy'^2 + xyy''$$

Подставляя в правую часть известные x, y, y' и найденное ранее y'', получим

$$y'''(0) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1^2 + 0 \cdot 1 \cdot 0 = 1.$$

В нашем распоряжении уже три ненулевых члена разложения, осталось найти еще один.

Находим четвертую производную — это производная от третьей производной.

$$y^{(4)} = (yy' + xy'^2 + xyy'')' = 2y'^2 + 2yy'' + 3xy'y'' + xyy''',$$

$$y^{(4)}(0) = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 1 = 2.$$

При необходимости аналогично можно найти прозводную пятого, шестого и так далее порядков.

Подставим найденные значения в формулу Маклорена и проведем упрощения.

$$y(x) \approx 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{2}{4!}x^4 = 1 + x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4$$

Ответ: $y(x) \approx 1 + x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4$.

3 Метод Эйлера

Метод Эйлера является простейшим методом решения задачи Коши и имеет невысокую точность, поэтому на практике его используют достаточно редко. С геометрической точки зрения идея метода Эйлера состоит в том, что фрагмент графика искомой функции заменяется ломаной линией, состоящей из участков касательных.

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y), \tag{7}$$

для которого требуется найти частное решение на отрезке $[x_0, X]$, соответствующее начальному условию

$$y(x_0) = y_0. \tag{8}$$

Разделим отрезок $[x_0, X]$ точками $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n = X$ на n равных частей и обозначим через h длину отрезков разбиения

$$h = \frac{X - x_0}{n}.$$

Заменим производную $y'(x_i)$ в каждой точке $x_1, x_2, \dots x_n$ в уравнении (7) разностной формулой

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \tag{9}$$

где y_i — это приближенные значения $y(x_i)$, т. е. $y_i \approx y(x_i), i = 1, 2, \dots, n$. При $x = x_0$ будем иметь

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = f(x_0, y_0).$$

В этом равенстве $x_0, \quad y_0, \quad h$ известны, следовательно находим

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h. \tag{10}$$

При $x = x_1$ будем иметь

$$\frac{y_2 - y_1}{h} = f(x_1, y_1),$$

или

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h.$$

Аналогично находим $y_3, y_4, \ldots y_n$, т.е. рекуррентная формула для вычисления приближенных значений $y(x_{i+1})$ имеет вид:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{11}$$

Таким образом, интегральная кривая $y(x)$ на отрезке $[x_o, x_1]$ заменяется отрезком касательной (10), соединяющей точку (x_0, y_0) с точкой (x_1, y_1). Точка (x_1, y_1), вообще говоря, уже не лежит на интегральной кривой $y(x)$, удовлетворяющей начальному условию (18). При $i = 1$ формула (11) дает точку (x_2, y_2). Отрезок, соединяющий точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) представляет собой часть касательной, проведенной в точке (x_1, y_1) к интегральной кривой $y(x)$, удовлетворяющей уравнению (7) и начальному условию $y(x_1) = y_1$. Следовательно, с каждым шагом метод Эйлера дает точки (x_i, y_i) которые, в общем случае, удаляются от интегральной кривой, соответствующей точному решению первоначальной задачи.

Формулу (11) можно получить и другим способом. Рассмотрим разложение искомого решения рассматриваемой задачи в ряд Тейлора с центром разложения в точке x_0:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x + 0)^3 + \cdots$$

Ограничиваясь двумя слагаемыми и учитывая, что $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, при $x = x_0$ получим (10). При замене ряда конечной суммой погрешность вычисления значения y_1 есть величина порядка $O(h^2)$. Аналогичные выкладки могут быть проделаны для каждого отрезка разбиения.

С учетом того, что количество шагов $n = \frac{X - x_0}{h}$ есть величина порядка $O(h^{-1})$, величина погрешности y_n — величина порядка $O(h)$.

Пример. При $x = 1$ найти приближенное значение решения уравнения

$$y' = y - x^2,$$

удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 3$.

Решение. Разделим отрезок $[0, 1]$ на 10 частей точками

$$x_0 = 0; 0,1; 0,2; \ldots; 1,0.$$

Следовательно, $h = 0,1$. Значения y_1, y_2,...,y_{10} будем искать по формуле:

$$y(x_{i+1}) \approx y_{i+1} = y_i + (y_i - x_i^2)h.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}
&y(0,1) \approx y_1 = 3 + (3 - 0^2) \cdot 0,1 = 3,3;\\
&y(0,2) \approx y_2 = 3,3 + (3,3 - 0,1^2) \cdot 0,1 = 3,629;\\
&y(0,3) \approx y_3 = 3,629 + (3,629 - 0,2^2) \cdot 0,1 = 3,9879;\\
&y(0,4) \approx y_4 = 3,9879 + (3,9879 - 0,3^2) \cdot 0,1 = 4,3777;\\
&y(0,5) \approx y_5 = 4,3777 + (4,3777 - 0,4^2) \cdot 0,1 = 4,7995;\\
&y(0,6) \approx y_6 = 4,7995 + (4,7995 - 0,5^2) \cdot 0,1 = 5,2544;\\
&y(0,7) \approx y_7 = 5,2544 + (5,2544 - 0,6^2) \cdot 0,1 = 5,7438;\\
&y(0,8) \approx y_8 = 5,7438 + (5,7438 - 0,7^2) \cdot 0,1 = 6,2692;\\
&y(0,9) \approx y_9 = 6,2692 + (6,2692 - 0,8^2) \cdot 0,1 = 6,8322;\\
&y(1,0) \approx y_{10} = 6,8322 + (6,8322 - 0,9^2) \cdot 0,1 = 7,4344.
\end{aligned}$$

Точное решение данного уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям, будет

$$y = e^x + x^2 + 2x + 2. \tag{12}$$

Следовательно, $y(1) = 7,7183$. Абсолютная погрешность полученного численного решения: $0,2839$; относительная погрешность: $\frac{0,2839}{7,7183} = 0,037 \approx 4\%$.

4 Метод Эйлера с пересчетом.

Метод Эйлера с пересчетом является, в общем случае, несколько более точным, чем просто метод Эйлера.

Будем рассматривать задачу Коши, сформулированную в предыдущем разделе. Если известно значение решения $y(x)$ и требуется вычислить значение $y(x+h)$ можно воспользоваться формулой

$$y(x+h) = y(x) + \int_0^h y'(x+t)dt. \tag{13}$$

Воспользовавшись формулой прямоугольников и заменив интеграл в правой части на величину $hy'(x)$, получим

$$y(x+h) \approx y(x) + hy'(x).$$

Поскольку $y'(x) = f(x, y(x))$, будем иметь

$$y(x+h) \approx y(x) + hf(x, y(x)).$$

Обозначая $x = x_i$ и $x + h = x_{i+1}$ получим расчетную формулу метода Эйлера.

Для получения более точной расчетной формулы нужно точнее аппроксимировать интеграл в правой части (13). Воспользовавшись формулой трапеции получим

$$y(x+h) \approx y(x) + \frac{h}{2}(y'(x) + y'(x+h, y(x+h)).$$

или

$$y(x+h) \approx y(x) + \frac{h}{2}(f(x, y(x)) + f(x+h, y(x+h)))).$$

В результате будем иметь расчетную формулу

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})). \tag{14}$$

В некоторых случаях это уравнение может быть разрешено относительно y_{i+1}. Чаще же явным образом выразить из этого уравнения y_{i+1} невозможно, поэтому преобразуем формулу (14). Заменим y_{i+1} в правой части на величину y^*_{i+1} вычисленную по формуле Эйлера

$$y^*_{i+1} = y_i(x) + h(f(x_i, y_i)).$$

Полученные соотношения определяют пару формул метода Эйлера с пересчетом

$$\begin{aligned} &y^*_{i+1} = y_i(x) + h(f(x_i, y_i)) \\ &y_{i+1} = y_i + \tfrac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^*_{i+1})). \end{aligned} \tag{15}$$

Надо отметить, что построенный таким образом алгоритм имеет погрешность порядка $O(h^2)$.

Пример. Рассмотрим решение задачи из предыдущего раздела с помощью модифицированного метода Эйлера. При $x = 1$ найти приближенное значение решения уравнения

$$y' = y - x^2,$$

удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 3$.

Решение. Разделим отрезок $[0, 1]$ на 10 частей точками

$$x_0 = 0; 0,1; 0,2; \ldots ; 1,0.$$

Следовательно, $h = 0,1$. Значения y_1, y_2,…,y_{10} будем искать по формулам (15).

$$\begin{aligned} &y^*_1 = 3,3; \\ &y(0,1) \approx y_1 = 3,3045; \\ &y^*_2 = 3,6450; \\ &y(0,2) \approx y_2 = 3,66; \\ &y^*_3 = 4,0220; \\ &y(0,3) \approx y_3 = 4,0376; \\ &y^*_4 = 4,4323; \\ &y(0,4) \approx y_4 = 4,4486; \\ &y^*_5 = 4,8774; \\ &y(0,5) \approx y_5 = 4,8944; \\ &y^*_6 = 5,3588; \\ &y(0,6) \approx y_6 = 5,3765; \\ &y^*_7 = 5,8782; \\ &y(0,7) \approx y_7 = 5,8968; \\ &y^*_8 = 6,4374; \\ &y(0,8) \approx y_1 = 8 = 6,4570; \\ &y^*_9 = 7,0387; \\ &y(0,9) \approx y_9 = 7,0592; \\ &y^*_{10} = 7,6842; \\ &y(1.0) \approx y_10 = 7,7059. \end{aligned} \tag{16}$$

С учетом того, что точное решение этой задачи известно (12), вычислим абсолютную погрешность полученного решения $0,0124$ и относительную погрешность $\frac{0,0124}{7,7183} = 0,0016066 \approx 0,2\%$.

5 Методы Рунге-Кутта

В этом разделе рассмотрим наиболее популярные методы решения задачи Коши — методы Рунге-Кутта. Эти методы позволяют получить приближенное решение рассматриваемой задачи практически любого порядка точности.

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y), \tag{17}$$

для которого требуется найти частное решение на отрезке $[x_0, X]$, соответствующее начальному условию

$$y(x_0) = y_0. \tag{18}$$

Для выведения формул метода Рунге-Кутта зафиксируем числа

$$\alpha_2, \ldots, \alpha_q, \quad p_1, \ldots, p_q, \quad , \beta_{ij}, \quad 0 < j < i \leq;$$

вычислим

$$\begin{aligned}
&k_1(h) = hf(x, y),\\
&k_2(h) = hf(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} k_1(h)),\\
&\ldots\ldots\\
&k_q(h) = hf(x + \alpha_q h, y + \beta_{q1} k_1(h) + \beta_{q2}(h) + \cdots + \beta_{qq-1}(h))
\end{aligned}$$

и положим

$$y(x + h) \approx z(h) = y(x) + p_1 k_1(h) + \cdots + p_q k_q(h).$$

Рассмотрим вопрос о выборе параметров α_i, p_i, β_{ij}. Обозначим $\varphi(h) = y(x + h) - z(x)$. Предположим, что $f(x, y)$ настолько гладкая, что существуют производные $\varphi'(h), \ldots, \varphi^{(s+1)}(h)$, а α_i, p_i, β_{ij} выбраны так, что $\varphi(0) = \ldots = \varphi^{(s)}(0) = 0$. Согласно формуле Тейлора выполняется равенство

$$\varphi(h) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\varphi^{(I)}(0)}{i!} h^i + \frac{\varphi^{(s+1)}(\theta h}{(s+1)} h^{s+1} = \frac{\varphi^{(s+1)}(\theta h}{(s+1)} h^{s+1}, \tag{19}$$

где $0 < \theta < 1$. Величина $\varphi(h)$ называется погрешностью метода на шаге, а s — порядком погрешности метода.

При $q = 1$ имеем

$$\begin{aligned}
&\varphi(h) = y(x+h) - y(x) - p_1 h f(x,y),\ \varphi(0) = 0,\\
&\varphi'(h) = y'(x+h) - p_1 f(x,y),\\
&\varphi'(0) = y'(x) - p_1 f(x,y) = f(x,y)(1-p_1),\\
&\varphi''(h) = y''(x+h).
\end{aligned}$$

Равенство $\varphi'(0) = 0$ выполняется для всех гладких функций $f(x,y)$ лишь в случае $p_1 = 0$. Этому значению p_1 соответствует метод Эйлера. Для погрешности этого метода на шаге, согласно (19), получаем выражение

$$\varphi(h) = \frac{y''(x+\theta h)h^2}{2}.$$

Рассмотрим случай $q = 2$. Имеем

$$\varphi(h) = y(x+h) - y(x) - p_1 h f(x,y) - p_2 h f(\tilde{x},\tilde{y}),$$

где $\tilde{x} = x + \alpha_2 h,\ \tilde{y} = y + \beta_{21} h f(x,y)$.

Вычислим производные функции $\varphi(h)$:

$$\varphi'(h) = y'(x+h) - p_1 f(x,y) - p_2 f(\tilde{x},\tilde{y}) - p_2 h(\alpha_2 f_x(\tilde{x},\tilde{y}) +$$

$$+\beta_{21} f_y(\tilde{x},\tilde{y}) f(x,y)),$$

$$\varphi''(h) = y''(x+h) - 2p_2(\alpha_2 f'_x(\tilde{x},\tilde{y}) + \beta_{21} f'_y(\tilde{x},\tilde{y}) f(x,y) -$$

$$-p_2 h(\alpha_2^2 f''_{xx}(\tilde{x},\tilde{y}) + 2\alpha_2\beta_{21} f''_{xy}(\tilde{x},\tilde{y}) f(x,y) + \beta_{21}^2 f''_{yy}(\tilde{x},\tilde{y}) f^2(x,y)),$$

$$\varphi'''(h) = y'''(x+h) - 3p_2(\alpha_2^2 f''_{xx}(\tilde{x},\tilde{y}) +$$

$$+2\alpha_2\beta_{21} f''_{xy}(\tilde{x},\tilde{y}) f(x,y) + \beta_{21}^2(\tilde{x},\tilde{y}) f^2(x,y)) + O(h).$$

Согласно исходному дифференциальному уравнению

$$y' = f,\ y'' = f'_x + f'_y f,\ y''' = f''_{xx} + 2f''_{xy} f + f''_{yy} f^2 + f' + yy''.$$

Подставим в выражения $\varphi(h),\ \varphi'(h),\ \varphi''(h),\ \varphi'''(h)$ значение $h = 0$, воспользуемся этими соотношениями и получим

$$\begin{aligned}
&\varphi(0) = y - y = 0,\\
&\varphi'(0) = (1 - p_1 - p_2) f(x,y),\\
&\varphi''(0) = (1 - 2p_2\alpha_2) f'_x(x,y) + (1 - 2p_2\beta_{21}) f'_y(x,y) f(x,y), \qquad (20)\\
&\varphi'''(0) = (1 - 3p_2\alpha_2^2) f''_{xx}(x,y) + (2 - 6p_2\alpha_2\beta_{21}) f''_{xy}(x,y) f(x,y) +\\
&+(1 - 3p_2\beta_{21}^2) f''_{yy}(x,y) f^2(x,y) + f'_y(x,y) y''(x).
\end{aligned}$$

Таким образом, $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0)$ при всех $f(x, y)$, если выполнены три соотношения относительно четырех параметров:

$$\begin{aligned} &1 - p_1 - p_2 = 0, \\ &1 - 2p_2\alpha_2 = 0, \\ &1 - 2p_2\beta_{21} = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Задавая произвольно один из параметров, можно получить различные методы Рунге-Кутта с погрешностью второго порядка малости по h.

Например, при $p_1 = 1/2$ получим $p_2 = 1/2$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_{21} = 1$, что соответствует расчетным формулам метода Эйлера с пересчетом (15).

При $p_1 = 0$ получим $p_2 = 1$, $\alpha_2 = 1/2$, $\beta_{21} = 1/2$, что соответствует паре следующих расчетных формул:

$$y_{i+1/2} = y_i + \tfrac{h}{2} f(x_i, y_i),$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i + \tfrac{h}{2}, y_{i+1/2}).$$

Приведем часто встречающиеся на практике формулы при $q = s = 4$, то есть формулы четвертого порядка точности:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \tag{22}$$

где

$$k_1 = f(x_i, y_i),\ k_2 = f(x_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{h}{2}k_1),$$

$$k_3 = f(x_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{h}{2}k_2),\ k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3).$$

Пример.

Решим методом Рунге-Кутта уравнение

$$y' = y - x^2,$$

при начальном условии $y(0) = 3$ с шагом $0,2$.

Решение.

Для $i = 0$ вычислим коэффициенты k_i. $x_0 = 0,\ y_0 = 3,\ h = 0,2$

$$\begin{aligned} &k_1 = f(x_0, y_0) = y_0 - x_0^2 = 3, \\ &k_2 = f(x_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2}k_1) = 3,29, \\ &k_3 = f(x_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2}k_2) = 3,319, \\ &k_4 = f(x_0 + h, y_0 + hk_3) = 3,6238, \\ &\Delta y_0 = \tfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0,66139, \\ &x_1 = x_0 + 0,2 = 0,2, \\ &y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 3,66139. \end{aligned}$$

При $i = 1$

$$
\begin{aligned}
&k_1 = f(x_1, y_1) = 3,62139,\\
&k_2 = f(x_1 + \tfrac{h}{2}, y_1 + \tfrac{h}{2}k_1) = 3,93352,\\
&k_3 = f(x_1 + \tfrac{h}{2}, y_1 + \tfrac{h}{2}k_2) = 3,96474,\\
&k_4 = f(x_1 + h, y_1 + hk_3) = 4,29434,\\
&\Delta y_1 = \tfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0,7904,\\
&x_2 = x_1 + 0,2 = 0,4,\\
&y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 4,45179.
\end{aligned}
$$

При $i = 2$

$$
\begin{aligned}
&k_1 = f(x_2, y_2) = 4,29179,\\
&k_2 = f(x_2 + \tfrac{h}{2}, y_2 + \tfrac{h}{2}k_1) = 4,63096,\\
&k_3 = f(x_2 + \tfrac{h}{2}, y_2 + \tfrac{h}{2}k_2) = 4,66488,\\
&k_4 = f(x_2 + h, y_2 + hk_3) = 5,02476,\\
&\Delta y_2 = \tfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0,93027,\\
&x_3 = x_2 + 0,2 = 0,6,\\
&y_3 = y_2 + \Delta y_2 = 5,38065.
\end{aligned}
$$

При $i = 3$

$$
\begin{aligned}
&k_1 = f(x_3, y_3) = 5,02206,\\
&k_2 = f(x_3 + \tfrac{h}{2}, y_3 + \tfrac{h}{2}k_1) = 5,39426,\\
&k_3 = f(x_3 + \tfrac{h}{2}, y_3 + \tfrac{h}{2}k_2) = 5,43148,\\
&k_4 = f(x_3 + h, y_3 + hk_3) = 5,82835,\\
&\Delta y_3 = \tfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1,083397,\\
&x_4 = x_3 + 0,2 = 0,8,\\
&y_4 = y_3 + \Delta y_3 = 6,46545.
\end{aligned}
$$

При $i = 4$

$$
\begin{aligned}
&k_1 = f(x_4, y_4) = 5,82545,\\
&k_2 = f(x_4 + \tfrac{h}{2}, y_4 + \tfrac{h}{2}k_1) = 6,23799,\\
&k_3 = f(x_4 + \tfrac{h}{2}, y_4 + \tfrac{h}{2}k_2) = 6,27925,\\
&k_4 = f(x_4 + h, y_4 + hk_3) = 6,7213,\\
&\Delta y_4 = \tfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1,2527,\\
&x_5 = x_4 + 0,2 = 1,0,\\
&y_5 = y_4 + \Delta y_4 = 7,71816.
\end{aligned}
$$

Точное решение задачи известно (12), абсолютная погрешность полученного решения — 0,00013 и относительная погрешность — 0,000017≈ $0,002\%$.

Как видно из полученных результатов последний метод дает наиболее точный ответ. Кроме того, следует обратить внимание на то, что ошибка (расхождение между точным и приближенным значениями) увеличивается с каждым шагом вычислений. Это обусловлено тем, что во – первых полученное приближенное значение округляется на каждом шаге, а во – вторых – тем, что в качестве основы вычисления принимается значение, полученное на предыдущем шаге, т. е. приближенное значение. Таким образом происходит накопление ошибки.

Список литературы

[1] *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987

[2] *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. М.: Высшая школа, 1998.

[3] *Пирумов У.Г.* Численные методы. М.: Дрофа, 2007.

[4] *Соболь Б.В., Месхи Б.Ч., Пешхоев И.М.* Практикум по вычислительной математике. Ростов-на-Дону: Феникс, 2008.